RECENSIONI – REVIEWS

Evandro Agazzi e Dario Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Mondadori, Milano, 1978, pp. 318.

Pensiamo che non sia necessario spendere molte parole per mostrare quale sia l'importanza della matematica nel sapere scientifico di oggi, e quindi nella civilizzazione in cui viviamo. E quando parliamo di matematica non intendiamo soltanto indicare l'insieme di strumenti (dalle teorie più astratte alle tecniche di calcolo, agli elaboratori elettronici) che questa scienza mette a disposizione delle altre, ma vorremo indicare anche – e soprattutto – la mentalità, il metodo, la impostazione e la struttura generale del discorso scientifico. Non vorremmo tediare il lettore richiamando il passo di Galileo (frequentemente citato) in cui si afferma che il gran libro della Natura è scritto in caratteri matematici; vorremmo ricordare soprattutto quanto sia importante per tutta la scienza la evoluzione critica e metodologica che la matematica ha realizzato a partire dalla fine del XVIII secolo. Particolarmente importante ci sembra la codificazione del metodo assiomatico, che conduce sostanzialmente a precisare in modo rigoroso quelle proposizioni che in una teoria vengono assunte come iniziali, ad enunciare con chiarezza quei termini che non ammettono definizione esplicita nell'interno di una teoria, a formalizzare al massimo gli enunciati, in modo che le deduzioni si avvicinino il più possibile a quell'ideale di "calcolo" che già era stato preconizzato da Leibniz. In questo senso vorremmo sostenere che la matematica costituisce oggi in certo modo il quadro ideale della teoria scientifica, o almeno la struttura ideale della sistemazione teorica del sapere scientifico, anche se non può pretendere di dettare tutte le leggi della induzione e della ricerca sperimentale.

Non ci sorprende per nulla il fatto che proprio la geometria abbia offerto una delle principali occasioni per l'evoluzione profonda che la matematica ha avuto nel secolo XIX. Invero la geometria è sempre stata considerata, in epoca classica, come uno dei rami principali della matematica; essa è stata definita, in altri tempi, come "scienza della quantità continua", oppure anche "scienza della estensione"; oggi essa è considerata invece come un ramo morto della scienza matematica, come un capitolo chiuso, destinato a non avere più alcuno sviluppo, a svuotarsi di significato col passare del tempo. Ma se questa concezione è spiegabile in uno stato della matematica che privilegia gli sviluppi formali, le strutture, rispetto ai contenuti, non era ovviamente accettabile in un'epoca nella quale la matematica era considerata come una scienza che ha determinati oggetti che la specificano. In questo ambito la geometria, come ben dicono Agazzi e Palladino, era una scienza che "... veniva pensata come volta ad indagare, descrivere, scoprire le proprietà di enti che sono certamente astratti, ma non per questo mancanti di esistenza autonoma rispetto al discorso che ne tratta". A nostro parere, queste parole presentano molto bene la posizione classica dei matematici nei riguardi della geometria; invero la osservazione del fatto che le figure – materialmente considerate – sono soltanto dei simboli dei concetti che vengono analizzati e studiati risale a Platone e forse a tempi anteriori; e giù giù fino a D. Hilbert, il quale affermò in forma icastica che "... le figure sono soltanto delle formule disegnate". L'universo di esistenza degli oggetti della geometria è stato posto in un luogo certamente diverso dall'universo fisico di cui tratta la scienza sperimentale; tuttavia non si rinunciava ad un certo grado di "realtà" degli enti della geometria, quale che fosse il significato che si attribuiva a questa "realtà" o "esistenza autonoma" di cui parlano gli AA.

Questa esistenza autonoma (in certo grado) degli oggetti della geometria fondava anche l'atteggiamento classico (originato da Euclide e mai cambiato fino al sec. XIX) che basava sulla "evidenza" la verità dei postulati geometrici. Non ci pare quindi affatto esagerato l'affermare che la crisi provocata dalla nascita delle geometrie non euclidee e soprattutto dalla dimostrazione della loro consistenza logica ha rappresentato una svolta fondamentale nello sviluppo del pensiero scientifico: infatti questa crisi ha definitivamente demolito la concezione della geometria che era stata ritenuta valida fino a quel tempo; ma ha anche dato l'avvio alla concezione moderna della matematica ed ha posto dei problemi fondamentali che hanno dato origine alla moderna logica. Si pensi al problema di garantire la non contradditorietà di un sistema di assiomi che non pretendono più di fondare la loro validità sul fatto di essere degli enunciati su una "evidenza" esterna a noi, ma sono scelti liberamente come proposizioni iniziali di una teoria. Si pensi alla questione della indipendenza dei postulati e alla riduzione di questa alla non contradditorietà; si pensi alla distinzione fondamentale tra l'aspetto sintattico e l'aspetto semantico di una teoria. Del resto vorremmo osservare che i fondamenti di questa distinzione sono stati posti anche da altre teorie geometriche, diverse dalle geometrie non euclidee; tra i tanti esempi che si potrebbero portare vogliamo ricordare qui gli studi sulla dualità geometrica, nel piano o nello spazio. Con questi studi la geometria proiettiva, con Gergonne, Poncelet e Staudt, prendeva lentamente coscienza del fatto che una stessa proposizione geometrica poteva avere diversi "contenuti", e che quindi una teoria poteva avere diversi modelli; si faceva strada così la convinzione della necessità di distinguere il momento della espressione verbale, della deduzione logica, da quello della ricerca di contenuti e del "significato concreto" (quale che sia la portata di questa espressione) di una proposizione scientifica. Maturava così quella ricerca di isomorfismi strutturali tra le varie teorie, che è fondamento della vastità e della ricchezza di risultati della fisica di oggi.

Per queste ed altre ragioni non possiamo non salutare con compiacimento la comparsa di un'opera che, pur cercando di mantenersi ad un livello elementare negli sviluppi tecnici, può essere letta con molto profitto anche da chi ha fatto studi di matematica, per la completezza della informazione storica e bibliografica e per l'inquadramento costante che i problemi trattati riceveno nell'ambito della logica.

Vorremmo dire che quest'opera aiuta alla ricerca delle radici remote e profonde del pensiero matematico di oggi, e presenta in modo esauriente e preciso il significato epistemologico di una evoluzione storica di estrema importanza; e questa evoluzione storica non viene presentata soltanto nella sua materialità, ma accanto alle informazioni vengono forniti anche gli strumenti concettuali per la valutazione esatta della situazione odierna delle ricerche in questo campo, così da stimolare il lettore ad ampliare in modo autonomo i propri orizzonti.

E' ben difficile, nel breve giro di una recensione, riferire completamente su un'opera di questa importanza: pertanto il rendiconto che ne diamo soffre necessariamente di una sommarietà che suscita il nostro rincrescimento, ma che vorrebbe invogliare alla lettura ed alla meditazione dell'opera.

L'introduzione del volume, relativamente breve ma molto succosa, precisa chiaramente il carattere della trattazione successiva e presenta lo stile che sarà mantenuto in tutto il seguito. Il titolo di questa introduzione è: *L'idea di dimostrazione ed il metodo assiomatico*. Gli Autori mettono a fuoco con chiarezza e rigore le questioni logiche ed epistemologiche che hanno dato al problema del V postulato di Euclide l'importanza storica di cui abbiamo detto nello sviluppo della matematica; vengono inoltre presentate le nozioni fondamentali di logica che serviranno nel seguito.

Il primo capitolo è intitolato: *Storia delle rette parallele*. In esso non vengono soltanto presentate le informazioni storiche abituali, ma si dà un'idea completa dell'assiomatica di Euclide, del suo significato e dei suoi limiti, e si presentano gli sviluppi che la questione ha avuto nei secoli precedenti il XIX, insieme con l'apporto dei principali ricercatori su questo argomento. Il secondo capitolo tratta della *Sistemazione hilbertiana della geometria*. Si potrebbe dire che questo è in certo modo un passaggio obbligato, perché una esposizione rigorosa ed esauriente della questione del V postulato non può limitarsi a partire dall'assiomatica euclidea; in questo ordine di idee, la trattazione che Hilbert diede dei fondamenti della geometria nella sua opera famosa rappresenta la sistemazione moderna più rigorosa della geometria classica che non rinuncia alla linea degli *Elementi* ma, rimanendo aderente allo spirito dell'opera euclidea, ne precisa i fondamenti e ne analizza le questioni critiche.

In questo capitolo abbiamo trovato particolarmente interessanti i paragrafi che riguardano la continuità, la esposizione dei vari modi in cui è stata rigorosamente presentata questa nozione, che la geometria classica considerava come "naturale", ed il confronto tra le varie trattazioni; viene approfondita l'analisi logica dell'enunciato hilbertiano con una dimostrazione originale (per quanto ne sappiamo) della deduzione degli assiomi classici dall'assioma di completezza di Hilbert. Il III capitolo è dedicato alla *Geometria iperbolica.* Vi si dà uno sviluppo rigoroso della geometria di Lobacevskij; la presentazione rimane sempre al livello più elementare possibile, ma presenta degli sviluppi che è raro trovare nei trattati e nelle presentazioni abituali.

Il IV capitolo è dedicato al *Modello di Poincaré.* L'importanza del concetto di *modello* è stata ben messa in evidenza negli sviluppi precedenti; in questo capitolo gli AA. hanno risolto in maniera che ben si può dire brillante il problema non facile di presentare in modo insieme rigoroso ed elementare un modello fondamentale per queste questioni, facendo per così dire toccare con mano la tecnica con cui può essere conseguito il risultato della dimostrazione della coerenza relativa della geometria iperbolica.

Il V capitolo tratta della *Geometria di Riemann.*

Anche in questo caso il livello volutamente elementare non impedisce agli AA. di presentare questioni che hanno importanza fondamentale in questi argomenti, non escluso l'argomento della orientabilità delle superfici.

Il capitolo VI tratta di *Altri sistemi geometrici.*

Si tratta di un *excursus* che dà una panoramica completa sulla geometria proiettiva e sul modello di Klein, e poi sulle principali *geometrie-non.*

Come si capisce bene, queste non sono soltanto delle "curiosità" logiche, ma hanno un loro compito radicale, che è – a nostro parere – quello di mettere in evidenza le questioni logiche importantissime che riguardano la dipendenza o l'indipendenza dei postulati sui quali, in modo più o meno conscio ed esplicito, si reggeva la geometria classica.

Il capitolo VII, intitolato *Considerazioni conclusive,* appare come la sintesi di tutta l'opera; esso da una parte ribadisce le idee fondamentali presentate nel corso del volume e dall'altra dissipa gli equivoci e gli scandali che la questione delle geometrie non euclidee ha suscitato e forse ancora suscita. La esposizione del programma di Erlangen mette in evidenza tutta la forza di sintesi che le idee di Klein hanno portato nella selva delle teorie geometriche; inoltre, i paragrafi dedicati al problema della verità delle teorie geometriche e ai rapporti tra la geometria e lo spazio fisico ci trovano pienamente consenzienti per la chiarezza delle soluzioni prospettate, con un linguaggio che raggiunge il notevole traguardo di essere assolutamente piano ed insieme perfettamente rigoroso.

Effettivamente si potrebbe dire che gli scandali e gli equivoci sono stati generati dalla non perfetta coscienza del fatto che gli enti delle varie geometrie sono definiti implicitamente dai sistemi di postulati che si scelgono; di conseguenza non vi è nulla di contraddittorio nel fatto che, per es., la retta della geometria euclidea e quella della geometria iperbolica si comportano in modo diverso: si tratta effettivamente di enti diversi, benché abbiano lo stesso nome; e sono diversi perché definiti implicitamente da diversi sistemi di premesse.

In questo ordine di idee, quindi, non ha senso la questione di un *experi-*

mentum crucis che porti a decidere sulla verità dell'una o dell'altra teoria semplicemente misurando la somma degli angoli di un triangolo fisicamente realizzato; invero tale misura sarebbe fondata su un postulato implicito, e cioè quello che i raggi della luce realizzano concretamente le rette di una certa geometria.

L'applicazione del linguaggio e delle tecniche della geometria differenziale alla relatività ha mostrato (come ben mettono in evidenza gli AA.) da una parte la necessità di chiarire bene quale sia il significato dei problemi relativi alla geometria dello spazio fisico; e dall'altra ha messo in evidenza la fecondità dei metodi geometrici per la descrizione e la conoscenza della realtà fisica. Personalmente riteniamo che l'apporto della geometria nella costruzione e nella invenzione di nuove teorie matematiche e fisiche non sia da sottovalutare. Ignorare questo apporto sarebbe voler ignorare quanta parte abbia la fantasia e — ci si perdoni il termine — anche la ispirazione nella invenzione matematica; sarebbe voler ignorare che il matematico, nel suo momento creativo, non può rinunciare alla immaginazione, e che il giusto equilibrio tra la fantasia creatrice e il rigore logico del formalismo e della deduzione è quello che conferisce alle teorie matematiche il loro aspetto più accattivante e affascinante.

Se volessimo adottare un linguaggio pittoresco, potremmo dire che può esser vero che la geometria è morta, come vogliono alcuni; vorremmo aggiungere che essa è morta come scienza di cristallina chiarezza e di certezza paradigmatica in relazione ai propri contenuti, proprio nell'epoca in cui nascevano le geometrie-non. Ma questa morte è stata feconda di spunti, di stimoli e di risultati fondamentali per tutta la matematica e — oseremmo dire — per tutta la scienza.

Carlo Felice Manara

AA.VV., *La sémantique dans les sciences*, Office International de Librairie, Bruxelles, 1978, pp. 221.

Nella collana degli "Archives de l'Institut International des Sciences Théoriques" compare questo volume dei contributi presentati al Convegno dell'Académie Internationale de Philosophie des Sciences, svoltosi a Rixensart dal 30 agosto al 3 settembre 1974. L'argomento in questione, la semantica nelle scienze, richiede, per la sua stessa natura, una indagine diversificata: da una parte è necessario esaminare le specificazioni del termine "semantica", definendo le diverse possibilità per una "teoria del significato", dall'altra questo processo solleva una serie di problemi filosofici generali ed impone inoltre il riferimento diretto con i linguaggi delle scienze. A queste esigenze hanno con-