

Commemorazione di Carlo Felice Manara

Antonio Lanteri e Mario Marchi

July 30, 2012



Il 4 maggio 2011 a Milano si è spento Carlo Felice Manara.

Era nato a Novara il 31 marzo 1916 e, dopo il liceo classico, si era iscritto presso l'Università degli Studi di Milano al corso di laurea in Scienze Matematiche, allora appena istituito. Laureato nel 1939 sotto la guida di Oscar Chisini, iniziò quindi la sua carriera scientifica, entrando a far

parte della grande Scuola di Geometria italiana, di cui Federigo Enriques, Maestro di Chisini, è stato eminente esponente.

Con Chisini, Manara ha formato e sviluppato la sua figura di scienziato e di studioso, profondo e brillante. Libero docente dal 1949, fu poi assistente di ruolo e professore incaricato presso la stessa Facoltà di Scienze M. F. N. dell'Università di Milano. Vincitore di concorso, nel 1951 fu chiamato a ricoprire la cattedra di Geometria analitica con elementi di proiettiva presso la Facoltà di Scienze M. F. N. dell'Università di Modena. Ebbe inizio così la sua lunga e feconda carriera di professore universitario, accompagnata e costellata di impegni e assunzioni di responsabilità accademiche, oltre che scientifiche, responsabilità alle quali Manara non si è mai sottratto.

Nel 1954 il prof. Manara venne chiamato a ricoprire la carica di Preside della Facoltà di Scienze M. F. N. dell'Università di Modena; fu poi anche Prorettore della stessa Università. A Modena Manara ricoprì anche incarichi di insegnamento presso l'Accademia Militare.

Nel 1956 si trasferì all'Università di Pavia e nel 1959 all'Università degli Studi di Milano, prima come titolare di Geometria e poi (dal 1970) di Istituzioni di Geometria superiore, e qui rimase fino al momento del suo collocamento fuori ruolo nel 1986. Da allora, fino al termine dell'anno accademico 1990-1991 egli ha continuato a tenere come affidamento l'insegnamento di Geometria differenziale. Fu nominato Professore Emerito dell'Università degli Studi di Milano nel 1991.

A Milano Carlo Felice Manara fu Preside della Facoltà di Scienze M. F. N. dal 1967 al 1970. In quegli anni difficili per l'Università italiana egli seppe governare la Facoltà con mano ferma e con grande buon senso, attento sempre alle istanze più serie degli studenti.

Dal 1956 al termine dell'anno accademico 1990-91 Manara ha anche svolto una intensa attività presso l'Università Cattolica, nelle facoltà di Economia e Commercio e di Scienze Politiche a Milano e nella Facoltà di Scienze M. F. N. nella sede di Brescia, impartendo numerosi insegnamenti: Matematica generale, Matematica finanziaria, Economia matematica, Logica, Matematiche elementari dal punto di vista superiore. Per la profondità e la molteplicità dei suoi interessi culturali e delle sue competenze scientifiche, nel 1987 l'Università Cattolica gli ha conferito la Laurea "honoris causa" in Filosofia.

A partire dal 1969 Manara fu invitato a tenere insegnamenti presso il Dipartimento di Econometria della Facoltà di Scienze economiche e sociali dell'Università di Ginevra, dove impartì corsi di Metodi matematici di ottimizzazione in economia fino al 1979.

Nella sua attività di insegnamento il prof. Manara ha trasmesso, con grande acutezza, la sua profonda cultura matematica e una vivissima capacità critica, nonché l'arguzia di uno sguardo sul mondo e sulla Matematica stessa, gettato con sorridente ironia.

Le sue lezioni mostravano fino dall'inizio, anche agli studenti del primo anno, una statura intellettuale non comune. Colpiva, soprattutto, l'eleganza delle sue lezioni ma lasciavano il segno anche molte delle divagazioni con cui amava punteggiarle. Si trattava, per esempio, di riflessioni critiche sul valore del simbolo in relazione allo sviluppo storico della matematica, oppure sul significato convenzionale della scelta posizionale dell'operatore rispetto alla variabile nelle formule matematiche, oppure ancora sulla finalità stessa del prendere appunti a lezione.

Nei primi anni sessanta, utilizzando strumenti formali molto moderni per i tempi (l'insegnamento di Algebra al primo anno, era stato da poco introdotto nell'ordinamento del Corso di laurea in Matematica), Manara aveva messo a punto un corso di Geometria I di sinteticità e chiarezza esemplari [58]¹. Il suo impianto, teso ad illustrare la geometria n -dimensionale negli ambienti proiettivo, affine ed euclideo secondo la visione Kleiniana, con largo impiego dell'algebra lineare, rimane tuttora assai valido.

Nei molti anni in cui tenne l'insegnamento di Istituzioni di Geometria superiore, Manara sviluppò sempre argomenti centrali per importanza e di grande interesse, spaziando, nelle varie edizioni, dalla geometria algebrica alla geometria differenziale, appoggiandosi a testi di rilievo, sia classici che moderni. Il corso su "superfici di Riemann e curve algebriche", nelle varie edizioni impartite tra il 1975 e il 1979, può annoverarsi, a parere di chi scrive, tra i più moderni e avanzati sull'argomento tenuti nei vari atenei italiani in quegli anni.

Per il prof. Manara l'impegno di servizio alla Scuola e alla Istituzione Universitaria si è esteso anche al di fuori della sua naturale sede di ruolo.

Membro dell'*Advisory Committee* del CEPES (Centre européen pour l'enseignement supérieur) dell'UNESCO, ne fu eletto presidente nel 1975, e in tale veste partecipò a diverse sessioni di lavoro presso la sede di Bucarest. Nel periodo 1982-84 egli fece anche parte del Consiglio Direttivo dell'IRRSAE (Istituto Regionale di ricerca, sperimentazione e aggiornamento educativi) della Lombardia. Fu inoltre titolare di un progetto 40% del Ministero della Pubblica Istruzione per la Didattica della Matematica.

Nel triennio 1971-74 Manara fu membro del Comitato Ordinatore della Facoltà di Scienze M. F. N. dell'Università della Calabria e dal 1971 al 1977 di quello dell'Università Cattolica nella sede di Brescia. Del Comitato Ordinatore dell'Università Cattolica egli fu anche presidente dal momento della istituzione, presso tale sede, del Corso di laurea in Matematica nell'indirizzo didattico. A quest'ultimo compito Carlo Felice Manara si è dedicato con grande impegno, assumendo egli stesso la responsabilità di uno tra gli insegnamenti specificamente finalizzati alla formazione dei futuri insegnanti della scuola secondaria.

Carlo Felice Manara ha avuto numerosi riconoscimenti per la sua attività di scienziato e di studioso. Era Membro della Accademia di Scienze, Lettere e Arti di Modena (socio effettivo dal 1975, emerito dal 2001), Membro dell'Istituto Lombardo, Accademia di Scienze e Lettere (socio corrispondente dal 1961, membro effettivo dal 1975), Membro della Académie Internationale de Philosophie de Sciences di Bruxelles dal 1978, Medaglia d'oro di Benemerito della Scuola, della Cultura e dell'Arte dal 1975.

Era Socio Fondatore dell'Unione Matematica Italiana.

La riflessione sulla natura psicologica, sulle radici storiche ed epistemologiche del pensiero matematico nonché sulle sue procedure conoscitive, ha sempre costituito un importante campo di indagine per il prof. Manara, seguendo in questo una tradizione già tracciata da grandi matem-

¹Il numero in parentesi quadre rimanda alle pubblicazioni elencate al termine di questa commemorazione.

atici come lo stesso Enriques, Giuseppe Peano e tantissimi altri illustri studiosi.

L'analisi delle procedure mentali legate alla nascita e allo sviluppo del pensiero matematico ha portato poi, in modo naturale, Manara ad essere al fianco di quanti, non solo coltivano la matematica come una propria ricchezza intellettuale personale, ma anche sono impegnati nel comunicarla agli altri, in particolare alle giovani generazioni. In questo senso è stato veramente un Maestro e una guida per diverse generazioni di insegnanti di ogni ordine scolastico. In questa sua attività egli ha contribuito per anni alla redazione del "Periodico di Matematiche" (attualmente organo ufficiale della Mathesis), di cui è stato anche condirettore, con Modesto Dedò (1963-1970). Inoltre, Manara ha collaborato a lungo con il Centro di Ricerche didattiche "Ugo Morin" di Paderno del Grappa ed è stato Membro (dal 1984) della Commissione Scientifica della rivista "L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate", organo dello stesso Centro di Ricerche. Animato dalla medesima urgenza educativa, Manara ha anche fatto parte (dalla fondazione, nel 1983) del Comitato Direttivo della rivista per insegnanti "Nuova Secondaria".

Il campo della ricerca scientifica in cui Manara ha esordito è stato quello della *Geometria algebrica* nell'indirizzo della Scuola italiana, così fecondo di risultati e ricco di problemi.

Il tema fondamentale sviluppato dalla Scuola di Chisini a Milano, di cui Manara è stato esponente di primo piano, è quello dei piani multipli e delle loro curve di diramazione. Questo studio nasce dall'esigenza di comprendere, in forma globale, il fenomeno della diramazione per funzioni algebriche di due o più variabili, fenomeno della geometria complessa che in dimensione 1 è governato dal classico teorema di esistenza di Riemann.

Riferendoci per semplicità al caso di due variabili, occorre ricordare che ogni superficie algebrica proiettiva complessa non singolare S si può immergere isomorficamente nello spazio proiettivo \mathbb{P}^5 a 5 dimensioni e di qui, per proiezione da un piano $\Lambda \subset \mathbb{P}^5$ su di un piano sghembo con esso, si ottiene un *piano multiplo*, cioè una mappa $f : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ (che è un *morfismo* oppure soltanto una *applicazione razionale* a seconda che Λ sia in posizione generica o meno rispetto ad S) di un certo grado m . Il luogo di diramazione è una curva algebrica piana B , in generale irriducibile, che per $m \geq 3$ risulta dotata di punti singolari. Fattorizzando f attraverso una prima proiezione in \mathbb{P}^3 , che ha per immagine una superficie in generale singolare e restringendosi in modo opportuno all'ambito affine, si può descrivere la situazione tramite la funzione algebrica $z(x, y)$ implicitamente definita da un'equazione della forma

$$F(x, y, z) = z^m + a_1(x, y)z^{m-1} + \dots + a_{m-1}(x, y)z + a_m(x, y) = 0, \quad (1)$$

con x, y, z complessi e $a_i(x, y)$ polinomi nelle variabili x ed y , di grado $\leq i$ e dove m è il grado di S se Λ è generico. Al variare di (x, y) nel piano affine complesso a cui ci si è ristretti, variano anche le diverse radici della (1) e quindi le controimmagini via f , che per (x, y) non appartenente a B sono esattamente m . Per una scelta di Λ sufficientemente generale, accade che in ciascuno dei punti non singolari di B due soltanto delle controimmagini via f vengano a coincidere tra loro, le ulteriori $m - 2$ rimanendo distinte, che B abbia solo nodi e cuspidi come punti singolari e che in un nodo

quattro radici vengano a collassare a due a due, rimanendo distinte le altre $m - 4$, mentre in una cuspidale siano tre le radici che vengono a collassare insieme, rimanendo distinte le altre $m - 3$.

Ad esempio, proiettando una superficie cubica liscia di \mathbb{P}^3 su di un piano da un punto generico si ottiene un piano triplo la cui curva di diramazione è una sestica avente come punti singolari soltanto sei cuspidi, disposte lungo una conica.

Il problema di caratterizzare le curve di diramazione tra le curve algebriche piane ha occupato molti autori a partire dalla celebre memoria di Enriques [Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione, *Ann. Mat. Pura Appl.* **1** (1924), 185–198], in particolare, B. Segre, O. Zariski, ed anche Chisini e la sua Scuola.

Le prime ricerche di Manara, sviluppate in collaborazione con Chisini, riguardano appunto la caratterizzazione delle curve di diramazione di certi piani tripli [10]. La peculiarità dei piani tripli è che per $m = 3$ la curva di diramazione B non possiede nodi ma soltanto cuspidi. I piani tripli considerati da Chisini e Manara sono di una classe particolare, da loro chiamata “semplice”: essi si ottengono proiettando su un piano la superficie S' (proiezione in \mathbb{P}^3 della superficie S originale) da un punto singolare isolato di molteplicità $d - 3$, supposto esistente, dove d è il grado di S (e pertanto f è soltanto una mappa razionale se $d \geq 4$). In tal caso, la (1) va rimpiazzata con l’equazione seguente:

$$F(x, y, z) = a_{d-3}(x, y)z^3 + a_{d-2}(x, y)z^2 + a_{d-1}(x, y)z + a_d(x, y) = 0, \quad (2)$$

dove gli a_i sono polinomi di grado uguale all’indice. In questa situazione, l’espressione esplicita che l’equazione di B viene ad assumere suggerisce la costruzione di alcune curve algebriche piane, sue covarianti proiettive (aggiunte di vari gradi) e si evidenziano subito delle relazioni numeriche tra il grado di S , il grado di B e il numero delle sue cuspidi. La caratterizzazione di B come curva di diramazione viene allora fornita attraverso queste relazioni tra i caratteri numerici, alcune relazioni di equivalenza lineare che coinvolgono il gruppo delle cuspidi e i gruppi in cui due delle curve covarianti risultano tangenti a B fuori di queste, e opportune proprietà delle serie lineari corrispondenti.

In una nota successiva [12] una simile caratterizzazione, annunciata in [13], viene presentata nel caso di piani tripli per i quali i polinomi in x, y che appaiono nella (2) abbiano gradi in progressione aritmetica con ragione maggiore di 1, e qualche anno più tardi, Manara [15] ne fornisce anche un’estensione alle dimensioni superiori.

Sul tema delle curve di diramazione dei piani tripli e della loro caratterizzazione attraverso il gruppo delle cuspidi, Manara ritorna poi ancora nel 1948 con una Nota [14] in cui si caratterizzano le curve di diramazione dei piani tripli “generalizzati”, riducendo questi birazionalmente ad avere diramazione lungo una curva B con equazione della forma $p^3 + q^2 = 0$, dove p e q sono polinomi in x, y , generici, di gradi $2h$ e $3h$ rispettivamente. Tali curve B hanno come singolarità esattamente $6h^2$ cuspidi, definite dal sistema $p = q = 0$, e, in ciascuna di esse, la tangente cuspidale di B è la tangente alla curva di equazione $q = 0$. Da notare che, per $h = 1$, si ottiene la sestica con sei

cuspidi su cui dirama il piano triplo definito dalla proiezione generica della superficie cubica liscia di \mathbb{P}^3 .

Ma al centro dell'interesse di Chisini e della sua Scuola era la questione dell'equivalenza birazionale dei piani multipli generali aventi la stessa curva di diramazione. Nel 1944 Chisini [Sulla identità birazionale delle funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione, *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3)* **77** (1944), 1–18] aveva stabilito un primo risultato in questa direzione, ma con tecniche di degenerazione che lo rendevano a suo giudizio insoddisfacente, in quanto limitative dell'ambito di applicabilità. Nella terminologia odierna, un rivestimento $f : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ (morfismo) con curva di diramazione B si dice *generico* se B soddisfa le condizioni semplificative sopra indicate, anche se f non deriva necessariamente da una proiezione generica.

In questi termini, la congettura di Chisini afferma che *un rivestimento generico $f : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ di grado $m \geq 5$ è univocamente determinato a meno di isomorfismi dalla sua curva di diramazione B .*

Oggi è noto che questa asserzione è vera per $m \geq 12$, come dimostrato da V. S. Kulikov [On Chisini's conjecture, *Izv. Math.* **63** (1999), 1139–1170] e S. Yu. Nemirovski [Kulikov's theorem on the Chisini conjecture, *Izv. Math.* **65** (2000), 71–74]. Più recentemente Kulikov [On Chisini's conjecture, II, *Izv. Math.* **72** (2008), 901–913] ha stabilito anche che la congettura è vera qualora il rivestimento $f : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ sia proprio ottenuto proiettando la superficie S di \mathbb{P}^5 da un piano generico.

Anche Manara si è dedicato al problema dell'equivalenza birazionale, con l'obiettivo di evitare il metodo di degenerazione utilizzato da Chisini e le limitazioni che questo comportava. Avvalendosi di un suo studio antecedente sulla rappresentazione analitica di una funzione algebrica di due variabili nell'intorno delle singolarità ordinarie della curva di diramazione [9], ha dimostrato che, nel caso particolare in cui la curva B sia razionale e priva di flessi, sussiste un risultato di identità birazionale: in tale situazione la superficie S risulta essere rigata e la funzione algebrica definita dalla (1) è caratterizzata dal fatto che i valori da essa assunti in (x, y) rappresentano i coefficienti angolari delle rette tangenti a B condotte dal punto (x, y) [16]. In [26] ha studiato il problema per i piani tripli, riconducendolo all'esame del rivestimento indotto da f sulla retta generica di \mathbb{P}^2 e in [20] ha sperimentato l'utilizzo di questo diverso approccio sui piani multipli.

Un'altra questione affrontata da Manara è quella dell'esistenza di curve algebriche piane irriducibili che ammettono dati caratteri plückeriani. In questo ambito rientra la costruzione di una curva di grado 8 e genere 5 con 14 cuspidi e due nodi [22], in contrasto con un'affermazione di Apery. La costruzione si basa sull'esistenza di una superficie quartica con una retta doppia, avente quattro punti doppi fuori di questa: due conici e due biplanari. B. D'Orgeval diede poi altre due dimostrazioni dell'esistenza di una siffatta superficie [À propos d'une surface du quatrième ordre, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **20** (1951), 437–438], ma non riuscì a dedurre l'irriducibilità della curva di diramazione del piano triplo che se ne ottiene per proiezione da un suo punto semplice. Questa fu stabilita da Manara con una breve argomentazione alternativa [21].

L'esposizione [42], tenuta in occasione del 3ième Colloque de Géométrie Algébrique di Bruxelles (1959), offre una rappresentazione dello stato dell'arte sulle diverse questioni di esistenza (curve

algebriche piane, piani e spazi multipli) di cui Manara si è occupato e sui diversi metodi algebrici e topologici seguiti da molti autori per affrontarle.

Dal 1950 e fino al 1954, pur continuando a sviluppare temi di geometria algebrica ([24], [31]), in particolare quello concernente le trasformazioni puntuali regolari del piano e la loro approssimazione con trasformazioni cremoniane ([18], [25]), Manara rivolge il suo interesse anche ad altri aspetti della geometria. Di rilievo alcuni risultati che ottiene nell'ambito della geometria differenziale, in particolare quelli sulla caratterizzazione integrale di certe superfici immerse in varietà riemanniane tridimensionali [30] e quelli riguardanti gli invarianti proiettivi differenziali dello spazio [33].

Da ricordare anche la Nota [160], in cui viene introdotto un particolare sistema di assiomi che permette di caratterizzare certi spazi di incidenza dotati di un insieme transitivo di dilatazioni involutorie, spazi rappresentabili mediante una opportuna classe di loop di incidenza.

Di grande importanza sono state anche le ricerche condotte da Carlo Felice Manara nel campo della matematica applicata allo studio delle realtà economiche e sociali. In questo ambito il nome di Manara è ben conosciuto come quello di un cultore profondo e acutissimo della *modellizzazione matematica di fatti economici*, in termini quantitativi astratti. Invero la collaborazione con Siro Lombardini, iniziata negli anni '50, condusse Manara ad occuparsi sempre più attivamente di questo campo di ricerca in cui diede contributi sia dal punto di vista metodologico sia da quello scientifico.

In effetti Manara ha svolto per molti economisti un ruolo di metodologo acuto, competente e profondo, ruolo essenzialmente fondato sul principio della collaborazione tra matematica e scienze economiche e sociali. Egli era infatti convinto del fatto che \ll l'economia è una dottrina difficile perchè riguarda il comportamento di soggetti umani, per la intricatezza degli influssi e delle interdipendenze, per la presenza della libertà umana, che spesso rende vane anche le previsioni più accurate e sagaci. In presenza di queste difficoltà si può pensare quindi che lo spirito metodologico di chiarezza e rigore, portato dall'impiego della Matematica, possa essere di grande utilità per i costruttori di teorie economiche e per gli utilizzatori di queste \gg (cfr. [133]).

Partendo da queste considerazioni e convinzioni, Manara rilegge anche il significato più generale di matematizzazione della scienza, evidenziando a questo fine alcuni aspetti chiave dello strumento matematico. Precisamente, egli sottolinea prima di tutto l'aspetto di linguaggio che la matematica presenta, nonché la sua capacità di codificazione ottenuta mediante l'uso di simboli artificiali dotati di leggi sintattiche di composizione. In secondo luogo rileva che occorre riconoscere la possibilità offerta dalla matematica di svolgere deduzioni rigorose e impeccabili, riconducendo la deduzione logica a manovre di simboli ed al calcolo. Infine l'aspetto più importante dello spirito e del metodo matematico, messo in evidenza da Manara, è rappresentato a suo giudizio da quella impostazione assiomatica generata dalla coscienza della necessità di strutturare ogni teoria scientifica su precise basi metodologiche, esplicitamente ed univocamente enunciate.

Con questo spirito, spinto dal desiderio di rendere disponibili ed accessibili gli strumenti matematici necessari per una corretta e feconda matematizzazione delle discipline economiche, Manara ha preparato e pubblicato (a partire dal 1957) in collaborazione con altri studiosi numerosi manuali

di analisi economica, matematica finanziaria e economia matematica ad uso di studenti o anche cultori delle discipline interessate (cfr. per es. [41], [38], [68]).

Tali testi si caratterizzano come strumenti matematici di alto livello e di profilo fortemente innovativo (anche relativamente all'epoca in cui sono stati scritti) mettendo a disposizione degli studiosi di discipline economiche risultati profondi e avanzati non solo di algebra, geometria e analisi matematica, ma anche di modellistica economica, teoria della programmazione lineare, teoria dei giochi, problemi microeconomici del consumo e della produzione, modelli di equilibrio statici e dinamici.

Dal punto di vista scientifico i contributi di Manara su temi di economia si possono distinguere essenzialmente in due momenti: i "contributi sul metodo" e i "contributi di ricerca scientifica" vera e propria. Abbiamo già accennato al ruolo svolto da Manara nel campo della collaborazione e integrazione tra disciplina matematica e dottrina economica. I contributi specifici e gli scritti sul metodo che è opportuno ricordare sono [71] e [133]. Il punto di partenza ci sembra che consista nel richiamo allo spirito metodologico, descritto sia con le parole di Pascal sullo "esprit de finesse", sia con quelle di Poincaré sul parlare di teorie più o meno "adeguate", piuttosto che di teorie "giuste" o "sbagliate". Manara infatti afferma: « Noi pensiamo che le costruzioni concettuali delle teorie economiche ... potrebbero essere giudicate con i criteri di adeguatezza di cui parlava Poincaré, senza la presunzione di valutarne la "verità assoluta". In altre parole, noi pensiamo che soltanto un certo "esprit de finesse" permetterà di scegliere l'ordine di approssimazione adeguato alle informazioni che si cercano ed a quelle che si posseggono in partenza, e permetta di apprezzare la validità delle deduzioni nella loro estensione e nella loro precisione » [133, p. 183].

Gli scritti di Manara su temi specifici di economia sono numericamente pochi ma non per questo meno significativi.

Nell'articolo [73], che riguarda il *modello di Sraffa* per la produzione congiunta di merci a mezzo di merci, Manara presenta il primo tentativo di tradurre gli schemi di Sraffa in termini di algebra matriciale, analizzando nitidamente e acutamente le basi logiche della trattazione di Sraffa e le condizioni o ipotesi sotto le quali il suddetto modello appare accettabile ovvero anche estendibile. Il saggio di Manara ha rappresentato un contributo cruciale per tutta la successiva letteratura sulla produzione congiunta. Ciò è riconosciuto da tutti gli autori, anche da quelli che non concordano con lui su alcuni punti, e si può dire che in termini di linguaggio e logica matematica esso rappresenti decisamente il più nitido tra i primi contributi su Sraffa. Ma oltre alla nitida presentazione formale, Manara aggiunge anche originali contributi relativi alla validità delle condizioni di esistenza del modello (cfr. [A. Quadrio Curzio, Carlo Felice Manara su economia e matematica, *Rend. Sem. Matem. Brescia* **10** (1988), 161–188]).

Nelle Note [75], [80], che riguardano rispettivamente, la prima il problema della rappresentazione delle preferenze del consumatore, e la seconda l'analisi delle dimostrazioni di esistenza per le soluzioni nei modelli di equilibrio generale, Manara utilizza ulteriormente lo strumento matematico per affrontare problemi di base nell'ambito della dottrina economica. In particolare nella Nota [75] egli introduce un opportuno sistema di assiomi, sottolineandone l'adeguatezza a descrivere ciò

che avviene nella realtà riguardo al comportamento del consumatore. Sulla base di tali assiomi, di cui viene stabilita l'indipendenza, è possibile costruire una funzione continua che abbia i caratteri di quella che gli economisti chiamano *funzione indice di utilità*, tramite la quale si perviene rapidamente alla soluzione del cosiddetto "problema del consumatore". Nella Nota [80] Manara esamina l'uso della funzione di distribuzione triangolare al fine di costruire un modello matematico che spieghi l'andamento di una certa variabile partendo da informazioni incerte che la riguardano.

La figura di Carlo Felice Manara, umanista aperto e problematico, appare vivissima dai suoi numerosi scritti, profondi, documentati e originali, profusi al servizio della cultura senza aggettivi in nome della persona spirituale e dei suoi diritti e doveri. Tali scritti sono indirizzati a insegnanti e studiosi che sono interessati ad approfondire le radici delle proprie conoscenze e a chiarire le ragioni e la affidabilità delle proprie certezze. L'inquadramento storico, sempre puntuale e pertinente, ravviva e rende quasi avvincente l'esposizione di numerosi concetti impegnativi e spesso riposti.

I temi di pensiero più cari a Carlo Felice Manara coinvolgono tutta la complessa problematica che riguarda le procedure conoscitive della nostra mente e la formazione del pensiero scientifico, la creatività intellettuale, il valore di conoscenza offerto dalla matematica, la natura della matematica stessa.

In questo ambito la geometria è stata oggetto delle sue più particolari attenzioni.

In numerosissimi scritti egli ha analizzato, approfondito, descritto l'evoluzione del pensiero matematico individuando, distinguendo, e sottolineando anche, il contributo specifico offerto da diversi studiosi. Della geometria Manara ha descritto, con profondità, acutezza e lucidità, l'evoluzione da scienza di contenuti ("scienza delle figure" o anche "scienza dello spazio") a scienza di strutture, cioè in altre parole, a teoria astratta che ha meritato il nome di *sistema ipotetico deduttivo*. In questo senso essa si presenta come un sistema logico fondato su un complesso di assiomi che ne costituiscono le basi razionali convenzionali.

Nel campo di riflessioni che riguardano la geometria, Carlo Felice Manara ha approfondito in particolare i legami esistenti tra *geometria* e *logica*. Le analisi che ha condotto in questo ambito riguardano in primo luogo la rilevanza concettuale dei criteri con i quali vengono stabiliti gli assiomi della teoria geometrica e in secondo luogo la prevalenza delle conclusioni che possono essere ottenute mediante la deduzione razionale rispetto a quelle risultanti dalla esperienza, anzi da ogni esperienza eseguibile. Infine, ma di non minore importanza, sono le analisi riguardanti la rilevanza dello studio della geometria come esercizio della logica, utile per gli studenti (di ogni età!) che debbono essere iniziati ed educati alla ricerca e al ragionamento.

In questo ordine di idee ricordiamo due temi di riflessione che egli ha particolarmente sviluppato. Il primo riguarda l'esame del significato e della portata del binomio *intuizione – rigore*, che, in antitesi, come anche in sintesi, rappresenta un filo conduttore all'interno della geometria, sia sul versante della riflessione epistemologica relativa al momento euristico e fondazionale, sia su quello della conferma argomentativa conclusiva.

Il secondo tema sposta la nostra attenzione sul versante didattico e riguarda il complesso dei

valori, non solo intellettuali ma anche umani e culturali, che possono essere collegati alla educazione geometrica.

Approfondendo ulteriormente l'esame delle linee di pensiero sviluppate da Carlo Felice Manara sembra di poter dire che i due atteggiamenti mentali ai quali egli dedica forse la maggiore attenzione nei suoi scritti, oltre che in tutta la sua multiforme attività di docente e di formatore, sono, da una parte quello legato al *rigore logico razionale*, e dall'altra quello della *creatività*.

Il tema della creatività ricorre certamente nella sua personale esperienza intellettuale, ma Manara riconosce anche il dono di una grande *creatività intuitiva* in moltissimi matematici i cui nomi ci sono ricordati come quelli di studiosi che con il loro contributo hanno creato nuovi campi di ricerca e nuovi strumenti di indagine.

Se Blaise Pascal riconosce nella *libertà* il carattere distintivo dell'agire umano, Manara indica nella *creatività* uno degli aspetti fondamentali sotto i quali si manifesta tale libertà. D'altra parte egli sostiene che la scienza stessa, se degna di questo nome, non potrebbe esistere senza l'atteggiamento di creatività dello spirito poiché, se è certo che ogni conoscenza prende l'avvio da elementi fattuali concreti desunti in qualche modo dalla realtà, l'atto definitivo del "conoscere" si completa solo con l'intervento della creatività dello spirito umano. In definitiva si deve riconoscere che è proprio l'azione insostituibile della *fantasia creatrice* che dà vita alla costruzione di una teoria scientifica e le conferisce, in un certo senso, un aspetto analogo a quello di una costruzione artistica, libera espressione dello spirito umano.

Sempre nell'ambito della geometria, una particolare attenzione è stata dedicata da Manara anche alla *geometria analitica*. Qui l'analisi è condotta su due versanti.

Il primo riguarda gli aspetti teorici e operativi di questo metodo di studio che ha costituito un punto di svolta rivoluzionario nella storia della dottrina geometrica che si era prima servita soltanto dei metodi deduttivi della logica verbale classicamente intesa.

Il secondo versante da cui Manara guarda alla geometria analitica consiste nel riconoscerla quale disciplina emblematica e rappresentativa di quella "matematizzazione del reale" di cui la matematica moderna è attore principale. Il suo metodo di rappresentazione può essere infatti applicato ad ogni aspetto della realtà con cui ci troviamo ad interagire, sia essa fisica, economica o sociale. Da questo punto di vista si può anche capire la ricchezza di valori educativi che sono impliciti nell'insegnamento della geometria analitica, valori che vanno ben al di là del semplice apprendimento di uno strumento utile per risolvere determinati, ma limitati, problemi geometrici.

La riflessione sulle radici epistemologiche della matematica, sulle procedure mentali che le accompagnano e i problemi di ordine logico e psicologico che vengono sollevati, costituiscono solo una parte del vasto ambito di pensiero abbracciato da Carlo Felice Manara. Infatti la sua costante preoccupazione di inquadrare in modo esauriente dal punto di vista storico tutte le questioni metodologiche a cui si è accennato, lo ha portato ad esaminare e approfondire, con grande cultura e acutezza di analisi, sia singoli episodi come anche ampi periodi della storia della evoluzione del pensiero matematico. Non potendo ricordare qui tutti i contributi in questo campo offerti da

Manara, richiamiamo almeno, solo come esempio, il volume [91] che offre una selezione di pagine scelte dagli scritti dei massimi studiosi matematici da Euclide a Enriques, oppure la Nota [94] che ci illustra un illuminante episodio di storia accademica legata allo sviluppo del pensiero matematico.

Per finire è anche doveroso ricordare le acute e approfondite analisi condotte da Manara relativamente ai metodi di indagine e di formulazione delle Scienze della Natura, la Fisica in particolare, dall'epoca del Rinascimento ai giorni nostri. Sono molteplici i riferimenti bibliografici ai lavori di Manara su questi temi, ma non si può non ricordare almeno il saggio [84] che offre una sintesi del suo pensiero in questo ambito. In queste indagini, sempre efficacemente e attentamente inquadrare dal punto di vista storico, come già si è osservato, e condotte con profonda e raffinata cultura, Manara non manca mai di mettere in evidenza il ruolo centrale giocato dal pensiero e dal metodo matematico, nella nascita, nello sviluppo e nella costruzione metodologica delle diverse scienze. Il riferimento iniziale, naturalmente, non può che essere a Galileo, ma dopo di lui numerosi sono i matematici che vanno ricordati per avere influenzato, e contribuito anche, con il loro pensiero, i loro risultati, i loro strumenti di indagine, alla edificazione del pensiero scientifico.

Lo stesso interesse per la matematica e per il suo ruolo di strumento di conoscenza, di pensiero e di formazione intellettuale, la sua costante attenzione per l'uomo e per i suoi valori, hanno anche portato Carlo Felice Manara a intervenire molte volte con le sue idee, e anche con la sua azione, nel cuore stesso dei problemi della Scuola e dell'insegnamento.

La Scuola, in tutti i suoi livelli e le sue specializzazioni, dalla scuola primaria alla università, dai corsi di formazione professionale ai problemi di insegnamento che sorgono operando con allievi in difficoltà, la Scuola dicevamo, costituisce un ambito di riflessione e anche di attivo impegno operativo personale al quale Manara ha dedicato grandi energie e impegno di tempo.

Ampio spazio è stato pure dedicato da Manara agli aspetti disciplinari dell'insegnamento: cosa si insegna, come si insegna, perché (cioè con quali obiettivi) si insegna. Anche sulle questioni relative all'utilizzo di nuove tecnologie nella pratica di insegnamento, Manara è intervenuto più volte con analisi lucide, acute, e in vari casi, profetiche.

Per concludere, è importante sottolineare che sullo sfondo di tutti questi pensieri e queste meditazioni a cui abbiamo accennato, il ruolo più rilevante nel giudizio di Manara è sempre attribuito all'uomo: al suo pensiero, alla sua figura di protagonista. È la libera creatività dell'uomo, accompagnata da uno scrupoloso rigore razionale, che è impegnata nell'opera di conoscere e poi di capire e razionalizzare ciò che ha conosciuto. È sempre questa che fa nascere, promuove ed edifica il pensiero scientifico. D'altra parte è l'attenzione e il rispetto per il valore della persona, intesa come individuo spirituale, quello che funge da criterio di giudizio circa l'importanza della conoscenza e delle applicazioni tecnologiche o operative che ne conseguono.

La figura di Carlo Felice Manara è dunque quella di uno studioso che è stato testimone di un sapere e di un impegno di ricerca della verità scientifica, sempre inseriti in un progetto di crescita culturale e umana della persona. Con profonda coerenza interiore egli ci ha anche offerto l'esempio di una vita illuminata da una autentica Fede in Dio, praticata attraverso il servizio all'uomo e nel rispetto della verità. È in questa Fede che si radica il suo impegno di uomo di scienza e di educatore

per la promozione e lo sviluppo dei valori culturali ed interiori dell'uomo, trasmessi attraverso la Scuola e la famiglia. La sua figura è quella di un Maestro a cui, in molti, siamo debitori per la sua testimonianza di autenticità di vita e per il suo esempio di impegno in termini di conoscenza e consapevolezza scientifica, anche al di là delle più severe tecniche di rappresentazione formale e di manipolazione simbolica che da lui abbiamo appreso.

Publicazioni

La Bibliografia completa di Carlo Felice Manara consiste di più di 350 voci. Nell'elenco allegato sono state indicate solo quelle relative ad argomenti di ricerca scientifica, libri di testo, e riflessioni di natura epistemologica riguardanti la matematica. Per l'elenco completo, altre notizie più specifiche ed estratti delle pubblicazioni si rinvia al sito web in corso di allestimento a cura della famiglia.

- [1] C. F. Manara. Semplice deduzione sintetica delle proprietà metriche di una notevole cubica piana. *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3)*, 74 (1940-41), 37-40.
- [2] C. F. Manara. Introduzione della funzione esponenziale mediante generazione meccanica della spirale logaritmica. *Period. Mat. (4)*, 20 (1940), 246-249.
- [3] C. F. Manara. Ricerca grafica della retta dei flessi di una cubica piana nodata. *Boll. Un. Mat. Ital. (2)*, 3 (1941), 320-325.
- [4] C. F. Manara. Vedute sulla geometria del triangolo. *Period. Mat. (4)*, 22 (1942), 145-157.
- [5] C. F. Manara. Invarianti per trasformazioni puntuali regolari dei rami superlineari ordinari delle curve algebriche piane. *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3)*, 77 (1943-44), 420-426.
- [6] C. F. Manara. Sul significato geometrico di alcuni invarianti dei rami superlineari ordinari delle curve algebriche piane. *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3)*, 77 (1943-44), 515-520.
- [7] C. F. Manara. Normale proiettiva e normale puntuale dei rami superlineari delle curve piane. *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3)*, 77 (1943-44), 579-586.

- [8] C. F. Manara. Il parallelismo di Levi-Civita nel piano iperbolico. *Period. Mat. (4)*, 23 (1943), 73-84.
- [9] C. F. Manara. La rappresentazione analitica di una funzione algebrica di due variabili nell'intorno di una singolarità ordinaria della sua curva di diramazione. *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3)*, 78 (1944-45), 191-203.
- [10] O. Chisini, C. F. Manara. Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 25 (1946), 255-265.
- [11] C. F. Manara. Esistenza topologica di diramazioni negative per le curve doppie. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8)*, 3 (1947), 67-71.
- [12] O. Chisini, C. F. Manara. Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli. II. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 26 (1947), 383-388.
- [13] O. Chisini, C. F. Manara. Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli. *Boll. Un. Mat. Ital. (3)*, 3 (1948), 6-8.
- [14] C. F. Manara. Per la caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli. *Boll. Un. Mat. Ital. (3)*, 3 (1948), 114-119.
- [15] C. F. Manara. Sulle caratterizzazioni delle ipersuperficie di diramazione degli S_n tripli. *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3)*, 82 (1949), 140-142.
- [16] C. F. Manara. Sulle curve di diramazione dei piani multipli. *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3)*, 82 (1949), 179-184.
- [17] C. F. Manara. La diramazione in questioni, anche elementari, di Geometria. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 20 (1949), 37-53.
- [18] C. F. Manara. Approssimazione delle trasformazioni puntuali regolari mediante trasformazioni cremoniane. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8)*, 8 (1950), 103-108.
- [19] C. F. Manara. Studio delle podarie rispetto a coniche. *Period. Mat. (4)*, 28 (1950), 184-188.
- [20] C. F. Manara. Una condizione sufficiente per la identità birazionale di due piani multipli. *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3)*, 84 (1951), 663-666.
- [21] C. F. Manara. Sur une démonstration d'irréductibilité. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, 11 (1951), 675-676.
- [22] C. F. Manara. Sulla esistenza di curve algebriche piane irriducibili aventi dati caratteri plueckeriani. *Boll. Un. Mat. Ital. (3)*, 6 (1951), 9-14.
- [23] C. F. Manara. Di un problema relativo ai triangoli. *Period. Mat. (4)*, 29 (1951), 91-97.

- [24] C. F. Manara. Le condizioni perché due curve gobbe siano omologiche rispetto ad un centro assegnato. *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3)*, 84 (1951), 15-22.
- [25] C. F. Manara. Sulle trasformazioni puntuali di un piano in un altro nell'intorno di un punto semplice della jacobiana. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 5 (1951), 40-53.
- [26] C. F. Manara. Identità birazionale dei piani tripli aventi una stessa curva di diramazione. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 5 (1951), 54-65.
- [27] C. F. Manara. Un teorema sui triangoli equilateri. *Period. Mat. (4)*, 33 (1953), 186-188.
- [28] C. F. Manara. *Complementi di Geometria. Lezioni sulle applicazioni geometriche dell'Analisi* (raccolte dal dott. Mario Italiani). Dini, Modena, 1953.
- [29] C. F. Manara. Questioni di esistenza di curve algebriche piane con caratteri assegnati. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 24 (1952-53), 66-77.
- [30] C. F. Manara. Caratterizzazione integrale di certe superfici immerse in varietà riemanniane tridimensionali. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8)*, 17 (1954), 15-21.
- [31] C. F. Manara. I gruppi ciclici di trasformazioni piane di Jonquières. *Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. (3)*, 87 (1954), 115-129.
- [32] C. F. Manara. L'aspetto algebrico di un fondamentale teorema di geometria descrittiva. *Period. Mat. (4)*, 34 (1954), 142-149.
- [33] C. F. Manara. Invarianti proiettivi differenziali nello spazio e curve W . *Boll. Un. Mat. Ital. (3)*, 9 (1954), 237-240.
- [34] C. F. Manara. Cubica equianarmonica legata ad una terna di E_1 . *Boll. Un. Mat. Ital. (3)*, 9 (1954), 353-359.
- [35] C. F. Manara. Osservazioni sulla geometria delle equazioni differenziali nel piano complesso. *Accad. Sci. Modena. Atti Mem. (5)*, 13 (1955), 252-257.
- [36] C. F. Manara. La Geometria nell'ambito del pensiero matematico. Discorso di inaugurazione dell'anno accademico 1954-55. *Annuario dell'Università di Modena*, (1954-55).
- [37] C. F. Manara. La risoluzione dell'equazione di quinto grado mediante funzioni ellittiche. *Period. Mat. (4)*, 34 (1956), 65-84.
- [38] C. F. Manara. *Elementi di Matematica finanziaria ed attuariale*. Malfasi, Milano, 1957.
- [39] C. F. Manara. Idee classiche ed idee moderne sulla geometria algebrica. Prolusione dei corsi all'Università di Pavia. *Period. Mat. (4)*, 35 (1957), 1-13.

- [40] C. F. Manara. Sul concetto di equivalenza per i poligoni ed i poliedri. *Period. Mat. (4)*, 35 (1957), 279-285.
- [41] S. Lombardini, C. F. Manara. *Introduzione matematica all'Analisi Economica*. La Goliardica, Milano, 1957-1958.
- [42] C. F. Manara. Questions d'existence de variétés algébriques. 1960 *3ième Coll. Géom. Algébrique* (Bruxelles, 1959), pp. 95-106. *Centre Belge Rech. Math. Louvain*.
- [43] P. Canetta, C. F. Manara. *Complementi di algebra ed elementi di trigonometria ad uso degli studenti dei corsi propedeutici delle facoltà universitarie*. La Goliardica, Milano, 1959.
- [44] P. Canetta, C. F. Manara. *Esercizi di matematica finanziaria ed attuariale*. La Goliardica, Milano, 1959.
- [45] C. F. Manara. Scritti matematici in onore di Filippo Sibirani. *Period. Mat. (4)*, 38 (1960), 187-195.
- [46] C. F. Manara. Orientamenti e questioni attuali di topologia. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 31 (1961), 91-99.
- [47] C. F. Manara. Pedagogia della Matematica. *L'educazione scientifica. Atti del VI Convegno di Scholè*. La Scuola, Brescia, 1962.
- [48] C. F. Manara. *Esercizi di Geometria*. Viscontea, Milano, 1962.
- [49] C. F. Manara. Un elegante teorema sugli ovali. *Period. Mat. (4)*, 41 (1963), 17-37.
- [50] C. F. Manara. Il computo degli zeri di una funzione. *Period. Mat. (4)*, 41 (1963), 79-99.
- [51] C. F. Manara. Successioni ed equazioni alle differenze finite. *Period. Mat. (4)*, 41 (1963), 129-160.
- [52] C. F. Manara. Area. *Enciclopedia della scienza e della tecnica*. Vol. I, Mondadori, Milano, 1963, pp. 791-792.
- [53] C. F. Manara. Geometria. *Enciclopedia della scienza e della tecnica*. Vol. V, Mondadori, Milano, 1963, pp. 532-548.
- [54] C. F. Manara. Le trasformazioni in geometria. *Enciclopedia della scienza e della tecnica*. Vol. X, Mondadori, Milano, 1963, pp. 255-256.
- [55] C. F. Manara. Ufficio e significato dell'esperimento nell'insegnamento della geometria. *Period. Mat. (4)*, 42 (1964), 248-258.

- [56] U. Amaldi, F. Enriques, C. F. Manara. *Elementi di trigonometria piana*. Zanichelli, Bologna, 1964.
- [57] C. F. Manara. Argomenti vecchi e insegnamenti nuovi: i diagrammi triangolari. *Le Scienze (la Matematica e il loro insegnamento)*, 2-3, (1965), 107-115.
- [58] C. F. Manara. *Lezioni di Geometria*. Viscontea, Milano, 1965.
- [59] C. F. Manara. Un teorema di Beppo Levi riguardante la logica formale. *Period. Mat. (4)*, 43 (1965), 177-182.
- [60] C. F. Manara. Linguaggio comune e logica simbolica. Alcune osservazioni. *Period. Mat. (4)*, 43 (1965), 305-311.
- [61] C. F. Manara. Sulla introduzione del concetto di ordinamento in un insieme. *Period. Mat. (4)*, 43 (1965), 353-374.
- [62] C. F. Manara. La scienza come valore nella società di oggi. *L'università, oggi*. Il Mulino, Bologna, 1965, pp. 49-68.
- [63] C. F. Manara, P. C. Nicola. *Appunti alle lezioni di matematica finanziaria (economica)*. ORSUC, Milano, 1964-65.
- [64] C. F. Manara, P. C. Nicola. Sui poliedri convessi. *Accad. Sci. Modena. Atti Mem. (6)*, 8 (1966), 89-100.
- [65] C. F. Manara. La Matematica nel pensiero galileiano. *Nel quarto centenario della nascita di Galileo Galilei*. Vita e Pensiero, Milano, 1966, pp. 103-113.
- [66] C. F. Manara. Sul problema delle formule ben formate. *Period. Mat. (4)*, 44 (1966), 106-122.
- [67] M. Dedò, C. F. Manara. Federigo Enriques. *Period. Mat. (4)*, 44 (1966), 360-366.
- [68] C. F. Manara, P. C. Nicola. *Elementi di economia matematica*. Viscontea, Milano, 1967.
- [69] C. F. Manara. Numeri cardinali finiti e transfiniti. *Ist. Mat. Univ. Milano*, (1967), 1-28.
- [70] C. F. Manara. La simmetria. *Period. Mat. (4)*, 45 (1967), 277-287.
- [71] C. F. Manara. Sull'impiego del metodo matematico in Economia. *Rivista internazionale di scienze sociali*, 75 (1967), 35-43.
- [72] C. F. Manara. Nota sull'applicazione del metodo e degli strumenti matematici alle scienze sociali. Centro nazionale di prevenzione e difesa sociale, Milano, 1967, pp. 3-12.

- [73] C. F. Manara. Il modello di Piero Sraffa per la produzione congiunta di merci a mezzo di merci. *L'industria*, 1 (1968), 3-18; ripubblicato in *Contributi alla teoria della produzione congiunta* (a cura di Luigi Pasinetti). Il Mulino, Bologna, 1977, pp. 17-36.
- [74] C. F. Manara. Sraffa's Model for the Joint Production of Commodities by Means of Commodities. *Essays on the Theory of Joint Production* (L. Pasinetti, Ed.). Macmillan Press, London, 1980.
- [75] C. F. Manara. Sulla introduzione di una funzione indice di utilità. *Period. Mat. (4)*, 46 (1968), 193-217.
- [76] C. F. Manara. Sull'aggiornamento degli insegnanti di matematica ed osservazioni scientifiche nella scuola media. *Period. Mat. (4)*, 46 (1968), 522-526.
- [77] C. F. Manara. *Corso di Geometria*. Viscontea, Milano, 1970.
- [78] G. Lucchini, C. F. Manara. *Esercizi e complementi di Geometria*. Viscontea, Milano, 1970.
- [79] C. F. Manara. Introduzione all'edizione italiana di *Fondamenti della Geometria* di D. Hilbert. Feltrinelli, Milano, 1970, pp. vii-xxvi.
- [80] C. F. Manara. Sull'uso delle distribuzioni triangolari nei modelli di pianificazione probabilistica. *Rivista di Statistica applicata*, (1971), 151-179.
- [81] G. Lucchini, C. F. Manara. Una introduzione alla teoria dei giochi di strategia (materiali sperimentali). Fascicolo n. 5, Istituto Ambrosiano per il Cinema, Milano, 1972.
- [82] G. Lucchini, C. F. Manara. Sull'impiego degli audiovisivi e dell'istruzione programmata nell'insegnamento della Matematica. Rendiconto del Seminario di Cosenza (17-20 ottobre 1972). Fascicolo n. 10, Istituto Ambrosiano per il Cinema, Milano, 1972.
- [83] C. F. Manara. Audiovisivi e istruzione programmata nell'insegnamento della Matematica. *Pedagogia e vita*, 34 (1972-73), 17-29.
- [84] C. F. Manara. *Metodi della scienza dal Rinascimento ad oggi*. Vita e Pensiero, Milano, 1975.
- [85] C. F. Manara. Un esperimento didattico: l'insegnamento della Matematica nei centri ANCI-FAP. *Pedagogia e vita*, giugno-luglio (1975), 513-541.
- [86] C. F. Manara. Il cinema d'animazione nell'insegnamento della Matematica. *ISCA informazioni*, (1975), 42-45.
- [87] C. F. Manara. Sulla risoluzione dei problemi matematici. *Didattica delle scienze*, 57 (1975), 6-17.

- [88] C. F. Manara. Le figure nell'insegnamento della geometria. *Didattica delle scienze*, 60 (1975), 6-11.
- [89] C. F. Manara. Osservazioni sulla geometria descrittiva. *Didattica delle scienze*, 61 (1976), 19-24.
- [90] C. F. Manara. Proiezioni ed autovalori di operatori lineari. *Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, 110 (1976), 214-219.
- [91] G. Lucchini, C. F. Manara. *Momenti del pensiero matematico*. Mursia, Milano, 1976.
- [92] C. F. Manara. Gruppi cristallografici piani. *Didattica delle scienze*, 68 (1977), 12-20; 69 (1977), 21-24.
- [93] C. F. Manara. Grandezze e misure. *Didattica delle scienze*, 72 (1977), 6-10; 73 (1978), 14-16.
- [94] C. F. Manara, M. Spoglianti. La idea di iperspazio. Una dimenticata polemica tra G. Peano, C. Segre e G. Veronese. *Accad. Sci. Modena. Atti Mem. (6)*, 19 (1977), 109-129.
- [95] C. F. Manara. Passato e presente nella metodologia della scienza. *Aspetti e momenti del rapporto passato-presente nella storia e nella cultura*. Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, Milano, 1977, pp. 99-110.
- [96] C. F. Manara. Programmazione e decisione in matematica elementare. *Didattica delle scienze*, 74 (1978), 19-22.
- [97] C. F. Manara. Programmi di decisione in condizioni di incertezza. *Didattica delle scienze*, 76 (1978), 27-30; 79 (1979), 13-16; 80 (1979), 24-27.
- [98] C. F. Manara. Il ruolo dell'insegnamento delle scienze nella scuola dell'obbligo. Atti del Convegno tenutosi a Brescia il 21.1.78 presso la Facoltà di Scienze dell'Università Cattolica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 1 (1978), 12-26.
- [99] C. F. Manara. Le geometrie non euclidee e i fondamenti della matematica. *Epistemologia*, (1978), 183-187.
- [100] C. F. Manara. Succès et limites de la mathématisation. 16th World Congress of Philosophy, Düsseldorf, 1978.
- [101] C. F. Manara. Dimensione storica nell'insegnamento delle scienze. *Didattica delle scienze*, 82 (1979), 18-21.
- [102] C. F. Manara, M. Spoglianti. R. G. Boscovich e i precursori di V. Poncelet. *Rend. Sem. Mat. Brescia*, 3 (1979), 142-180.

- [103] C. F. Manara. Scienza e tecnica nello sviluppo dell'uomo di oggi. *Alessandro Volta (1827-1977)*. Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, Milano, 1979, 19-59.
- [104] P. Canetta, C. F. Manara. *Elementi di matematica finanziaria ed attuariale*. Viscontea, Milano, 1980.
- [105] C. F. Manara. Intuizione e logica. Problemi didattici della Matematica. *Didattica delle scienze*, 86 (1980), 25-28.
- [106] C. F. Manara. La Matematica come strumento di formazione culturale. *Didattica delle scienze*, 89 (1980), 13-18.
- [107] C. F. Manara. *Matematica*. Cluet, Trieste, 1980.
- [108] C. F. Manara. La matematizzazione della realtà nei suoi sviluppi storici. 1. La crisi galileiana della scienza della natura. *Didattica delle scienze*, 95 (1981), 19-22, 36; 2. Il calcolo infinitesimale e la meccanica classica. *Didattica delle scienze*, 97 (1982), 11-13; 3. Dalla meccanica razionale alla termodinamica. *Didattica delle scienze*, 98 (1982), 29-32; 4. La concezione di Einstein e la geometrizzazione della fisica. *Didattica delle scienze*, 99 (1982), 10-12.
- [109] C. F. Manara. Federigo Enriques et David Hilbert. *Epistemologia*, (1981), 189-204.
- [110] C. F. Manara, E. Proverbio. Astronomia di posizione e Geometria dello spazio. *Supplemento al Notiziario dell'Unione Matematica Italiana (8)*, 7 (1981), 10-28.
- [111] C. F. Manara. Evidenze e postulati in geometria. *Studi Cattolici*, 256 (1982), 331-339.
- [112] C. F. Manara. Il linguaggio della scienza. *Didattica delle scienze*, 102 (1982), 11-13; 103 (1983), 17-19.
- [113] C. F. Manara. Il contributo di Enriques alla Matematica contemporanea. *Federigo Enriques: approssimazione e verità* (a cura di Ornella Pompeo Faracovi). Belforte, Livorno, 1982, pp. 25-42.
- [114] C. F. Manara. La Matematica come linguaggio privilegiato della scienza. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 6 (1983), 28-35.
- [115] C. F. Manara. Geometria e Fisica: spunti per un'analisi. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 6 (1983), 72-100.
- [116] C. F. Manara. Matematica ed elaboratori di informazione. *La Cà Granda* 24 (1983), 11-14.
- [117] C. F. Manara, R. Tardini Manara. I piccoli calcolatori tascabili nella scuola: spunti didattici. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 6 (1983), 82-102; 69-83; 47-61.
- [118] C. F. Manara. *Appunti di logica elementare*. ISU Univ. Cattolica, Milano, 1983.

- [119] C. F. Manara. Geometria e logica. *Nuova secondaria*, 1, 4 (1983), 38-40, 57.
- [120] C. F. Manara. L'insegnamento della Matematica per problemi. Spunti di discussione. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 7 (1984), 5-25.
- [121] C. F. Manara. L'evoluzione della Matematica nel secolo XIX. *Storia delle scienze* (diretta da Evandro Agazzi), Vol. II, cap. XIV, Città Nuova, Roma, 1984, pp. 15-49.
- [122] G. Giorello, C. F. Manara. La Matematica del XX secolo. *Storia delle scienze* (diretta da Evandro Agazzi), Vol. II, cap. XX, Città Nuova, Roma, 1984, pp. 247-294.
- [123] C. F. Manara. La Geometria. Problemi logici e didattici. *Scuola e didattica*, (1984), 49-64.
- [124] C. F. Manara. La scuola e l'informatica. Relazione al 39° Convegno del CNADSI. *La voce del CNADSI (XXII)*, 2 (1984), 3-6.
- [125] C. F. Manara. Il concetto di media. *Nuova Secondaria*, 2, 5 (1985), 83-86.
- [126] C. F. Manara. La generalizzazione del concetto di geometria. *Nuova Secondaria*, 2, 6 (1985), 31-34.
- [127] C. F. Manara. Ampliamento del concetto di Geometria. *Nuova Secondaria*, 2, 6 (1985), materiali in inserto, 52-56.
- [128] C. F. Manara. Che cosa una persona colta deve sapere di matematica. *Nuova Secondaria*, 2, 8 (1985), 15-18.
- [129] C. F. Manara. La Matematica nel pensiero occidentale. *Per la Filosofia. Filosofia ed insegnamento (III)*, 6 (1986), 25-36.
- [130] C. F. Manara. La geometria: valori conoscitivi e formativi. *Persona e Sapere, Quaderno della Fondazione Sacro Cuore*, 1 (1986), 52-58.
- [131] P. Canetta, C. F. Manara, M. Marchi. *Per un curricolo continuo di educazione matematica nella scuola dell'obbligo*. Quaderni IRRSAE Lombardia n. 13, Milano, 1986.
- [132] C. F. Manara. Computer ed insegnamento della Matematica. *Quaderno 16/86 del Dip. Mat. Univ. Milano*.
- [133] C. F. Manara. L'economia e il metodo matematico. *Economia politica*, 3 (1986), 169-186.
- [134] C. F. Manara. Giuseppe Veronese ed il problema del continuo geometrico. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 56 (1986), 99-111.
- [135] C. F. Manara. L'insegnamento della Logica nella scuola dell'obbligo. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 9 (1986), 40-55.

- [136] C. F. Manara. La mathématique face a son histoire. Relazione al Congresso annuale di Friburgo della Académie des Sciences di Bruxelles. *Epistemologia*, (1987), 125-138.
- [137] A. Quadrio Curzio, M. Faliva, C. F. Manara. Produzione ed efficienza con tecnologie globali. *Economia politica*, 4 (1987), 11-47.
- [138] C. F. Manara. La Matematica. *Nuova Secondaria*, 4, 9 (1987), 78-83.
- [139] C. F. Manara. Ricordo di Oscar Chisini (Atti del Convegno di Geometria, Milano, maggio 1987). *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 57 (1987), 11-29.
- [140] C. F. Manara. La visione kleiniana della geometria. *Scuola e didattica*, 5 (1987), 37-41.
- [141] C. F. Manara. L'eguaglianza in geometria. *Nuova Secondaria*, 5, 5 (1988), 65-67; 5, 6 (1988), 71-74.
- [142] C. F. Manara. Il problema del continuo geometrico nel pensiero di Ruggero Boscovich. *Bicentennial commemoration of R. G. Boscovich - Proceedings* (M. Bossi e P. Tucci ed.). Unicopli, Milano, 1988, pp. 171-188.
- [143] C. F. Manara. Ruggero Boscovich scienziato misconosciuto. *Scienza e Vita nuova*, (1988), 102-104.
- [144] C. F. Manara. La matematica nella scuola secondaria superiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 11 (1988), 685-703.
- [145] C. F. Manara. Informatica nella scuola. *Libertà di educazione*, (1988).
- [146] C. F. Manara. La continuità in geometria. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 11 (1988), 907-937.
- [147] C. F. Manara. Matematica dell'incerto. L'insegnamento della statistica e della probabilità. *Scuola e didattica*, 5 (1988), 37-42.
- [148] C. F. Manara. Computer e insegnamento della matematica. *Scuola e didattica*, 5 (1988), 49-64.
- [149] C. F. Manara. Variazioni di autovettori delle matrici leontieviane. *Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, 122 (1988), 3-17.
- [150] C. F. Manara. La definizione. Richiami di Logica elementare. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 11 (1988), 1145-1167.
- [151] C. F. Manara. Protagonisti della cultura italiana del Novecento - Federigo Enriques. *Nuova Secondaria (VI)*, 5 (1989), 84-85.

- [152] C. F. Manara. *Il certo e il probabile. Piccolo manuale di logica e di calcolo delle probabilità.* La Scuola, Brescia, 1989.
- [153] C. F. Manara. *Problemi di didattica della matematica.* La Scuola, Brescia, 1989.
- [154] A. Davoli Albini, C. F. Manara. Progetto di intervento su soggetti con difficoltà di apprendimento. Provincia di Milano. Assessorato ai servizi sociali e cultura. USSL n. 60, Vimercate, 1989.
- [155] C. F. Manara. Problemi filosofici della geometria in Ruggero Giuseppe Boscovich. *Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, 123 (1989), 215-236.
- [156] C. F. Manara. Il pensiero matematico tra la fine dell'800 e l'inizio del 900. *Il pensiero scientifico di Vito Volterra* (di AA.VV.). La Lucerna, Ancona, 1990, pp. 23-38.
- [157] C. F. Manara. La storia delle scienze al servizio della didattica delle scienze. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 14 (1991), 1155-1176.
- [158] C. F. Manara. Nodi, trecce, tessuti, un capitolo della geometria. *Tessitori di Carnia [Il sapere tecnico del "Libro di Tacamenti" di Antonio Candotto (XVIII secolo)]*. Goriziana, Gorizia, 1991, pp. 261-272.
- [159] C. F. Manara. Simplessi e simmetrie in uno spazio qualunque. *Accad. Sci. Modena. Atti Mem. (7)*, 8 (1990-1991), 141-175.
- [160] C. F. Manara, M. Marchi. On a class of reflection geometries. *Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, 125 (1991), 203-217.
- [161] C. F. Manara. I frattali: capitolo nuovo della geometria. *Il problema della misura e i nuovi campi di applicazione*. Mathesis Varese, 1991, pp. 5-22.
- [162] C. F. Manara. L'insegnamento della matematica nella scuola elementare in Italia. *Pedagogia e vita*, 4 (1992), 7-19.
- [163] C. F. Manara. L'assiomatica classica e moderna. *Nuova Secondaria*, 9, 10 (1992), 37-41.
- [164] C. F. Manara. Intervento scritto per il Convegno su handicap e difficoltà di apprendimento, Castel San Pietro. *Matematica e difficoltà (1)*. Pitagora, Bologna, 1992, pp. 91-94.
- [165] C. F. Manara. Contributi alla teoria del consumatore. Coerenza e coerenza parziale. *Economia politica*, 9 (1992), 49-65.
- [166] C. F. Manara. L'aspetto geometrico di una questione di economia. La coerenza del consumatore. *Convegno per i sessanta anni di Francesco Speranza*. Dipartimento di Matematica Università di Bologna, 1992, pp. 123-134.

- [167] C. F. Manara. I valori educativi e formativi dell'insegnamento delle scienze esatte. *Pedagogia e vita*, 2 (1993), 7-14.
- [168] C. F. Manara. Rappresentazione geometrica di parole. *Ratio mathematica*, 6 (1993), 79-83.
- [169] C. F. Manara. Il calcolo approssimato. Dimensioni culturali e didattiche. *Nuova Secondaria*, 11, 3 (1993), 77-80.
- [170] C. F. Manara, M. Marchi. *L'insegnamento della matematica nei primi due anni della scuola secondaria superiore*. La Scuola, Brescia, 1993.
- [171] C. F. Manara. *Grandezze, misure, proporzionalità*. Dip. Mat. Univ. Milano, Quaderno 30, 1993.
- [172] C. F. Manara. La matematica chiave di lettura della realtà. *Libertà di educazione*, 1-2 (1993-1994), 53-56.
- [173] C. F. Manara. I fondamenti della geometria nel pensiero di G. Peano. *Atti del Convegno "Il pensiero matematico nella ricerca storica italiana"*, Quaderno n. 13. IRRSAE Marche, Ancona, 1993, pp. 209-220.
- [174] C. F. Manara. Introduzione a *Ripensando l'educazione matematica* di Hans Freudenthal. La Scuola, Brescia, 1994, pp. 5-16.
- [175] C. F. Manara. Il concetto di "astrazione" in matematica. *Scuola italiana moderna*, 13 (1994), 24-27.
- [176] C. F. Manara. Un sistema di assiomi per un continuo unidimensionale aperto. *Scritti in onore di Giovanni Melzi* (di AA. VV.). Vita e Pensiero, Milano, 1994, pp. 285-300.
- [177] C. F. Manara. Giuseppe Peano e i fondamenti della Geometria. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 17 (1994), 283-295.
- [178] C. F. Manara. Metodi della Geometria nel secolo XIX. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 17 (1994), 385-394.
- [179] C. F. Manara. Osservazioni sulla costruzione di matrici quadrate soddisfacenti a particolari condizioni. *Economia politica*, 11 (1994), 439-448.
- [180] C. F. Manara. L'evoluzione della geometria nel secolo XIX e conseguenze didattiche. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 17 (1994), 619-661.
- [181] C. F. Manara. Geometria: intuizione e ragione. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 17 (1994), 755-760.
- [182] C. F. Manara. *Sui fondamenti del calcolo delle probabilità*. Vita e Pensiero, Milano, 1994.

- [183] C. F. Manara. Creatività ed insegnamento della matematica. *Atti del Convegno "Parlare di scienza o fare scienza?"* Diesse, Milano, 1995, pp. 25-50.
- [184] C. F. Manara. Le scienze e il linguaggio matematico. *KOS*, 117, (1995), 51-53.
- [185] C. F. Manara. Il Periodico di Matematiche nel dopoguerra, ricordi personali. *Period. Mat. (VII)*, 2 (1995), 54-63.
- [186] C. F. Manara. Sistemi di assiomi per un insieme unidimensionale topologicamente chiuso. *Atti del Convegno di Studi in memoria di Giuseppe Gemignani, 1994*. Mucchi, Modena, 1995, pp. 51-68.
- [187] C. F. Manara. I frattali. Nuove idee per la geometria. *KOS*, 123, (1995), 30-31 e 34.
- [188] C. F. Manara. La geometria proiettiva. IRSSAE Marche, Ancona, 1995.
- [189] C. F. Manara. L'insegnamento della matematica ai soggetti in difficoltà. *Atti del convegno "L'handicap nella scuola secondaria superiore"*. Omega, Torino, 1995, pp. 257-261.
- [190] C. F. Manara. La creatività geometrica. *Atti del Convegno "Pensiero scientifico e creatività"*, Quaderno n. 21. IRSSAE Marche, Ancona, 1996, pp. 209-221.
- [191] C. F. Manara. Matematica e logica. *Atti del Convegno "Pensiero scientifico. Fondamenti ed epistemologia"*, Quaderni di Innovazione e Scuola, n. 29. IRSSAE Marche, Ancona, 1996.
- [192] C. F. Manara. La Mathesis nel primo dopoguerra. *Atti del Congresso Mathesis per il centenario 1895-1995*. Palombi, Roma, 1996, pp. 67-71.
- [193] C. F. Manara. Blaise Pascal matematico. *Rivista di Filosofia Neo-Scolastica*, 87, 5 (1995), 531-550.
- [194] C. F. Manara. Costruzione di matrici quadrate soddisfacenti a particolari condizioni. *Vita e Pensiero*, Milano, 1996, pp. 107-123.
- [195] C. F. Manara, R. Manara. La formazione matematica degli studenti: i problemi dell'apprendimento. *Dispensa del Corso di perfezionamento in Didattica della Matematica, a.a. 1996-1997*, Università Cattolica del Sacro Cuore, Brescia.
- [196] C. F. Manara. "Costruire" la Geometria. *KOS*, Milano, 136 (1997), 27-31.
- [197] C. F. Manara. Soluzioni trascendenti delle equazioni algebriche di quinto e sesto grado. *Francesco Brioschi (1824-1897). Convegno di studi matematici. Incontro di Studio N. 16*. Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, Milano, 1997.
- [198] C. F. Manara. Matematica e incertezza. *KOS*, Milano, 146 (1997), 31-34.

- [199] C. F. Manara. Le difficoltà in Matematica. Problemi didattici. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20 (1997), 209-226.
- [200] C. F. Manara. La creatività in matematica. *Emmeciquadro*, 1 (1998), 7-13.
- [201] C. F. Manara. La logica e lo sviluppo storico della matematica. *Emmeciquadro*, 5 (1999), 75-90.
- [202] C. F. Manara. Novecento matematico. *Novecento novecenti*, Brescia, 1999, pp. 197-213.
- [203] M. Cantoni, C. F. Manara. Logica e realtà virtuale in geometria. *Nuova Secondaria*, 17, 4 (1999), 41- 47.
- [204] C. F. Manara, M. Molino. Osservazioni didattiche sulle procedure di dimostrazione e soluzione dei problemi. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 22 (1999), 35-48.
- [205] C. F. Manara. Il concetto di modello nella scienza. *Nuova Secondaria*, 18, 7 (2001), 79-84;
- [206] C. F. Manara. Maestri della Geometria. *Emmeciquadro*, 12 (2001), 7-14.
- [207] C. F. Manara. La matematica nel futuro liceo classico. *Nuova Secondaria*, 19, 9 (2002), 79-84.
- [208] C. F. Manara. Il sostegno a soggetti in difficoltà. *Le difficoltà nell'apprendimento della matematica* (a cura di A. Contardi, B. Piochi). Trento, 2002, pp. 165- 170.
- [209] C. F. Manara. Difficoltà: sostegno e recupero. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 26 (2003), 243-254.
- [210] C. F. Manara, M. Marchi. Geometria: rigore e creatività. *Accad. Sci. Modena. Atti Mem. (8)*, 7 (2004), 40-41.
- [211] C. F. Manara. Che cosa è geometria. *Emmeciquadro*, 31 (2007), 7-18.
- [212] C. F. Manara. La creatività in matematica. *Insegnare matematica* (a cura di Anna Paola Longo e Stefania Barbieri). Guerini, Milano, 2008, pp. 48-53.