cietà storica in cui opera. Infatti si propone un ordinamento degli studi ben diverso dal modello uniforme francese, con un notevole sforzo di adeguamento ai bisogni della realtà meridionale. In tal modo nel secondo periodo napoletano, Cuoco sembra voler comporre le istanze di progressiva emancipazione popolare attraverso l'istruzione, con quelle del rispetto dell'ordine di uno sviluppo naturale e organico, che avevano rispettivamente caratterizzato la sua concezione dell'educazione nel primo periodo napoletano e in quello milanese. In questo è certo da ravvisare l'influenza del nuovo clima politico murattiano in cui il legalismo si sposa con aspettative di autonomia nazionale, cui Cuoco aderisce nel cenacolo di casa Gravina col Pepe, Colletta, Pignatelli, Zurlo, tra gli altri, e a cui darà il proprio contributo per la stesura del proclama di Rimini, col quale Murat sollecitava la guerra di liberazione e indipendenza nazionale ad ampio consenso popolare.
Ma è ancora da ravvisare la continuità di quel nucleo che caratterizza dall'inizio il suo metodo e il suo pensiero, il senso del realismo storico derivato dallo studio su Vico e Machiavelli, che si sposa con l'altra decisiva componente della formazione cuochiana, il senso del riformismo politico concreto fondato sull'analisi positiva delle situazioni economiche, giuridiche, culturali, sociali, statistiche, che gli veniva da Genovesi e Galanti, pervenendo a un fecondo connubio di storicismo e illuminismo, che sarà proprio di alcuni protagonisti del Risorgimento come Cattaneo. Il contenuto del *Rapporto* del Cuoco non resterà limitato all'incidenza sulla successiva politica scolastica del meridione, penetrando ad esempio di profonde suggestioni le *Relazioni per la riforma della pubblica istruzione nel regno di Napoli* del De Sanctis nel 1848, ma ispirerà il programma di educazione popolare nazionale di Mazzini e Gioberti, sino alla codificazione dell'istruzione pubblica dell'Italia unificata con la legge Casati.

Ezio Sciarra

Carlo Felice Manara

L'eguaglianza in geometria. 2

L'interessante sviluppo del concetto di eguaglianza contribuisce alla trasformazione della geometria da scienza di determinati oggetti a scienza di determinate operazioni mentali.

Abbiamo accennato[1] a diverse posizioni che si possono assumere nei riguardi della relazione di uguaglianza; esporremo nel seguito alcuni particolari a questo proposito, ma prima di farlo, vorremmo ribadire ciò che abbiamo già detto in precedenza. In particolare vorremmo ripetere che la scelta dei concetti primitivi di una teoria ammette un certo grado di libertà, e dipende dai gusti e dalle tendenze culturali dell'autore che espone la teoria stessa; tuttavia riteniamo che non sia possibile lasciare la determinazione del significato dei termini che esprimono i concetti fondamentali ad una non ben determinata «intuizione», ma che sia necessario dare dei concetti stessi una definizione implicita, mediante opportuni sistemi di postulati.

Questa esigenza è stata chiaramente esposta da G. Peano, che scrive: «*È chiaro che non tutti gli enti si possono definire; ma è importante in ogni scienza ridurre al minimo numero gli enti non definiti. Di questi si enunceranno solo le proprietà*». E aggiunge: «*Le proprietà fondamentali delle idee primitive sono determinate da "proposizioni primitive" o proposizioni che non si dimostrano. Le proposizioni primitive fungono in certo modo come definizioni delle idee primitive*» [12, iii].
E del resto questa osservazione era già stata fatta da B. Pascal, il quale scriveva: «*Il est évident que les premiers termes qu'on voudroit définir en supposeroint des précédents pour servir à leur explication... et ainsi est clair qu'on n'arriveroit jamais aux premiers.*
Ainsi en poussant les recherches de plus en plus on arrive nécessairement à des mots primitifs, qu'on ne peut plus définir» [11].
E d'altra parte la necessità di porre delle proposizioni primitive era già stata riconosciuta da Aristotele, il quale afferma che: «*Non tutte le cose si possono dimostrare*» [1, ii].
Quale che sia la strada che si sceglie, ci preme osservare qui esplicitamente che la relazione di uguaglianza tra figure, così come è accettata dalla «intuizione» nelle trattazioni classiche, e viene precisata nelle trattazioni più moderne mediante sistemi di postulati, può in ogni caso essere classificata tra quelle che A. Padoa [10] ha chiamato *relazioni equaliformi* e che oggi vengono abitualmente chiamate *relazioni di equivalenza*.
Ricordiamo che una relazione equaliforme deve possedere certe proprietà che possono essere esposte sinteticamente nel modo seguente: convenendo di indicare con il simbolo

(1) xRy

il fatto che la relazione indicata con «R» intercede tra gli oggetti, indicati con i simboli x ed y, si deve avere

(2) xRx (proprietà riflessiva)

(3) se è xRy allora è yRx (proprietà simmetrica)

(4) se è xRy ed anche yRx allora è xRz (proprietà transitiva).

È anche noto che una relazione equaliforme (o relazione di equivalenza) permette di costruire delle classi di figure, da chiamarsi *uguali* o *congruenti* o *equivalenti* a seconda dei casi, e che le figure appartenenti ad una medesima classe di equivalenza sono caratterizzate dall'avere in comune determinate proprietà.

[1] Carlo Felice Manara, *L'eguaglianza in geometria. 1*, «Nuova Secondaria», n. 5, 15 gennaio 1988, pagg. 65-67.

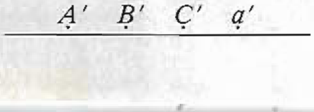
Come è ben noto, si suol dire che una relazione di equivalenza permette di costruire l'insieme quoziente dell'insieme di tutte le figure, beninteso rispetto alla relazione considerata; e si suole aggiungere che gli oggetti della geometria non sono tanto le singole figure quanto gli elementi dell'insieme quoziente che è stato costruito mediante la relazione considerata.
Ritornando alle possibili impostazioni che conducono alla relazione di equivalenza, pensiamo di poter dire che la posizione classica dimostra di essere più vicina alla prima impostazione piuttosto che alla seconda; in altre parole, nella posizione classica, la relazione di uguaglianza tra figure pare che sia stata sempre considerata come del tutto chiara ed evidente, di modo che il trasporto rigido per la sovrapposizione pare che sia stato pensato sempre come una tecnica per verificare il sussistere di una relazione, il cui concetto era considerato come del tutto chiaro ed evidente.
Pertanto, se si segue questa strada e si adotta questa impostazione, occorre precisare il concetto di uguaglianza ed il significato del termine che lo esprime mediante un opportuno sistema di postulati, che ne diano la definizione implicita.
Come è noto, è questa la strada che fu percorsa per esempio da D. Hilbert, nella sua fondamentale opera intitolata *Grundlagen der Geometrie* [7]. Qui il matematico tedesco enuncia cinque assiomi della congruenza (terzo gruppo di assiomi); ed egli definisce il concetto di *trasporto* (di un segmento, di un angolo, di una figura qualesivoglia) sulla base della relazione implicitamente definita.

Riportiamo qui di seguito gli assiomi del III gruppo, che egli chiama *assiomi di congruenza:*

III.1. *Se A, B sono due punti di una retta ed inoltre A' è un punto sulla stessa retta ovvero su un'altra a', si può sempre trovare un punto B', da una data parte della retta a' rispetto ad A', tale che il segmento AB sia congruente, ovvero uguale, al segmento A'B'.*

III.2. *Se un segmento A'B' ed un segmento A″B″ sono congruenti ad uno stesso segmento AB, allora anche il segmento A'B' è congruente al segmento A″B″, ovvero, brevemente: se due segmenti sono congruenti ad un terzo, essi sono congruenti fra loro.*

III.3. Siano AB e BC due segmenti senza punti in comune su una retta a ed A'B' e B'C' due segmenti sulla stessa retta o su un'altra retta a', sempre senza punti in comune;



allora, se è

$$AB \equiv A'B' \quad \text{e} \quad BC \equiv B'C',$$

è pure $\quad AC \equiv A'C'.$

III.4. *Siano dati un angolo $\sphericalangle$ (b, k) in un piano α ed una retta a' in un piano α', come pure un determinato lato di a' in α'. Si indichi con b' una semiretta dalla retta a', che abbia origine nel punto O': c'è allora nel piano α' una ed una sola semiretta k', tale che l'angolo $\sphericalangle$ (b', k') ed allo stesso tempo tutti i punti interni all'angolo $\sphericalangle$ (b', k') stanno dalla data parte di a'; in simboli:*

$$\sphericalangle (b, k) \equiv \sphericalangle (b', k').$$

Ogni angolo è congruente a se stesso, cioè si ha sempre

$$\sphericalangle (b, k) \equiv \sphericalangle (b, k).$$

III.5. *Se per due triangoli ABC ed A'B'C' valgono le congruenze*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C',$$
$$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C',$$

allora è sempre valida anche la congruenza

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'.$$

Sulla base di questi assiomi Hilbert è poi in grado di dimostrare gli ordinari teoremi che riguardano i cosiddetti criteri di uguaglianza dei triangoli.

Abbiamo visto, su un esempio, come si possa dare una definizione implicita della relazione di uguaglianza e quindi si possa poi definire il trasporto rigido delle figure come una trasformazione che conserva tale relazione.
Ripetiamo tuttavia ancora che questo atteggiamento non è l'unico possibile, anche se ci appare come quello più vicino alla mentalità della geometria, nella sua concezione classica.
Vorremmo invero richiamare ciò che abbiamo già detto, e cioè che la relazione di uguaglianza permette di costruire delle classi di equivalenza nell'insieme delle figure, e che l'oggetto della attenzione del geometra non è quasi mai la singola figura ma la classe di equivalenza alla quale essa appartiene, perché due figure, appartenenti alla stessa classe, sono liberamente sostituibili l'una all'altra, ai fini della proprietà comune che il geometra intende studiare.
In questo ordine di idee, si può impostare la ricerca della definizione rigorosa della uguaglianza tra figure dando una caratterizzazione implicita della costruzione di classi di equivalenza mediante il concetto di *gruppo di trasformazioni.*
Sia *Tr* un gruppo ed indichiamo qui con le lettere dell'alfabeto latino maiuscole i suoi elementi.
Indichiamo poi, come al solito, la operazione di composizione interna, valida in *Tr*, semplicemente scrivendo l'uno dopo l'altro i simboli dei due elementi di *Tr* che si compongono, scrivendo quindi, per esempio:

$$C = AB; \tag{1}$$

indichiamo con il simbolo «*E*» l'elemento neutro del gruppo, in modo che sia sempre:

$$EA = AE = A; \tag{2}$$

infine indichiamo, come al solito, con A^{-1} l'inverso di un elemento *A*, in modo che si abbia:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E. \tag{3}$$

Sia poi $\mathcal{T}$ un insieme, ed indichiamo con le lettere minuscole dell'alfabeto latino i suoi elementi; si avrà quindi:

$$x, y, z, \ldots, u, v, w, \ldots \in \mathcal{T}. \tag{4}$$

Sia ora *Tr* un gruppo di trasformazioni di $\mathcal{T}$ su se stesso; scriveremo semplicemente

$$y = xA \tag{5}$$

per indicare che l'elemento *y* di $\mathcal{T}$ è stato ottenuto operando sull'elemento *x* con la operazione *A*. In particolare poniamo che l'elemento neutro *E* sia la trasformazione identica, di modo che si abbia, per ogni $x \in \mathcal{T}$:

$$xE = x; \tag{6}$$

poniamo infine, come al solito:

$$(xA)B = x(AB), \tag{7}$$

e quindi in particolare, come conseguenza della (5);

$$yA^{-1} = x(A\,A^{-1}) = xE = x. \tag{8}$$

Queste semplici convenzioni permettono di istituire in $\mathcal{T}$ una relazione di equivalenza, cioè — ricordiamo — una relazione che possiede le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.
Precisamente, considerati due elementi $x, y \in \mathcal{T}$, scriveremo

$$x \equiv y \tag{9}$$

se esiste un elemento $A \in Tr$ tale che valga la (5). Allora la (6) può essere letta dicendo che la relazione così definita è riflessiva, e le (5), (8) possono essere interpretate come la dimostrazione che la relazione stessa è simmetrica. Infine se insieme con la (5) vale anche la:

$$z = yB \tag{10}$$

si avrà pure:

$$z = (xA)\,B = x(AB) \tag{11}$$

e quindi se è:

$$x \equiv y \text{ ed anche } y \equiv z, \tag{12}$$

allora è:

$$x \equiv z\,. \tag{13}$$

La impostazione che abbiamo presentato traduce sostanzialmente le idee che già H. Helmholtz aveva espresso a proposito dei fondamenti della geometria [6]. È chiaro che in questa impostazione è possibile ricuperare la geometria classica, e la nozione abituale di uguaglianza che era sottintesa in questa, con una adeguata assiomatizzazione del gruppo di trasformazioni che forniscono i movimenti rigidi dello spazio; questa strada è stata battuta per esempio da M. Pieri [13], con una trattazione elegante e rigorosa. In più vorremmo osservare che questa impostazione permette una grande generalizzazione dei concetti e dei procedimenti della geometria. Da parte nostra, pensiamo che le radici lontane di questa rottura del quadro tradizionale della geometria debbano essere ricercate nella creazione della geometria proiettiva, e quindi nelle opere dei matematici ai quali questa creazione si deve: V. Poncelet, K. K. von Staudt, J. Steiner. Inoltre — come è noto — queste idee sono state in certo modo codificate nell'opera di F. Klein, e nella sua acuta sintesi delle ricerche geometriche maturate nel secolo XIX [8].

Le discussioni che abbiamo brevemente svolto nei paragrafi precedenti riguardano uno sviluppo interessante dei concetti geometrici, sviluppo che si è realizzato nel secolo XIX e che ha avuto una grande influenza non soltanto sulla geometria ma — pensiamo — anche sull'intera matematica.

Per limitarci qui alla geometria, appare chiaro che quando si assuma la posizione che fa dipendere la definizione di uguaglianza da quella di gruppo di trasformazioni, è possibile, in linea di principio, estendere di molto la portata delle considerazioni che sono oggetto della dottrina geometrica. Per citare un solo esempio, quando si imposti la geometria proiettiva sui soli concetti grafici, come fa K. K. von Staudt [14] è possibile definire corrispondenze tra piani o tra spazi che sono molto più generali di quelle ottenute con movimenti rigidi o anche con similitudini.

Ne consegue che il concetto di uguaglianza tra figure può essere definito rispetto al gruppo delle omografie e quindi può acquisire una portata molto più generale; e soprattutto può essere introdotto e definito indipendentemente dalla posizione che si prende nei riguardi del movimento rigido.

Vorremmo aggiungere anche una seconda osservazione, che amplia la portata di quelle già avanzate ed estende la nostra attenzione anche alle branche della matematica diverse dalla geometria. Infatti pare a noi che molte delle discussioni svolte a proposito della definizione di uguaglianza abbiano avuto la loro origine anche nella idea che, in modo più o meno conscio, si aveva della geometria e del suo oggetto.

Pare infatti di poter dire che, all'inizio del secolo XIX, si considerava la geometria come una scienza determinata dal proprio oggetto; e che questo fosse definito in vario modo, come *lo spazio vuoto ed assoluto* o anche la *estensione* o in altro modo. Invero una delle maggiori difficoltà nella accettazione delle geometrie non-euclidee consistè nella apparente aporia che queste dottrine introducevano nella concezione che si aveva di un oggetto ben determinato della geometria, oggetto che pertanto non poteva dare origine a dottrine tra loro contraddittorie.

Ora, a proposito di queste concezioni dell'oggetto della geometria, vorremmo citare ancora una volta G. Peano, il quale scriveva: «*In quasi tutti i trattati italiani moderni* (egli scriveva nel 1894) *si introduce per primo il concetto di spazio, dicendo che esso non si definisce, ma gli si attribuiscono le proprietà di essere omogeneo, illimitato, infinito, divisibile, immobile ecc., proprietà queste parimenti non definite.*

Ritenendo pertanto il concetto di spazio come fondamentale per la geometria, ne viene che non si potrebbe scrivere un trattato di questa scienza in una lingua che per avventura manchi di tali parole. Quindi non si potrebbe scrivere di geometria nella lingua d'Euclide e di Archimede, ove appunto manca la parola corrispondente al termine spazio, nel senso in cui lo si usa nei moderni trattati» [12, iii].

Lo spostamento della attenzione dalla considerazione della uguaglianza tra figure, concepita come una relazione a sè stante, alla costruzione di classi di equivalenza con gruppi di trasformazioni, spostò anche l'attenzione dalla geometria intesa come scienza di determinati oggetti (che tuttavia non si sapevano concretamente definire in modo rigoroso) a quella di scienza di determinate operazioni mentali; queste prendono occasione dalla manipolazione fisica di oggetti materiali concreti o da osservazioni empiriche eseguite con i nostri sensi, ma assumono poi una autonomia logica in forza di precisazioni, conseguite con la enunciazione di determinati sistemi di postulati.

Pensiamo che si possa dire qualche cosa di analogo anche in relazione alle altre branche della matematica; dottrina che — a nostro parere — va assumendo sempre di più l'aspetto di una scienza che studia le procedure e le strutture piuttosto che oggetti determinati.

E pensiamo di non essere lontani dal vero dicendo che questa evoluzione dell'immagine della matematica verso l'assetto che sta prendendo attualmente sia stata favorita dalla geometria e stimolata dalle discussioni che questa scienza ha originato.

Carlo Felice Manara

BIBLIOGRAFIA

[1] Aristotele. i) *Topica,* libro VII, Cap. I, 15.
ii) *Metaph.* 4, 4.
[2] Benedetti, Piero, *Fondamenti di geometria,* in L. Berzolari, G. Vivanti, D. Gigli, *Enciclopedia delle matematiche elementari,* Milano, 1937, Vol. II, Parte I.
[3] Bochenski, Innocenzo M., *Nove lezioni di logica simbolica, Lezione VIII,* Roma, 1938.
[4] Chisini, Oscar, *Discorso sull'uguaglianza.* «Rend. Sem. Mat.» Milano, Vol. XIV, 1940.
[5] Heath, Thomas L., *The thirteen books of Euclid's elements,* New York, 1956.
[6] Helmholtz, Hermann Ludwig, Ferdinand von, *Ueber die tatsachlichen Grundlagen der Geometrie.* Wiss. Abhandl. Leipzig., 1882.
Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen. Ibid.
[7] Hilbert, David, *Fondamenti della geometria,* Milano, 1970.
[8] Klein, Felix, *Vergleichende Betrachtugen über neuere geometrische Forschungen,* Göttingen, 1878. Tradotto in italiano con il titolo: *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti,* «Annali di Mat.», 1981.
[9] Mendelson, Elliot, *Introduzione alla logica matematica,* Torino, 1972, Cap. 2.
[10] Padoa, Alessandro, *Dell'astrazione matematica. Questioni filosofiche,* 1908.
[11] Pascal, Blaise, *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader.*
[12] Peano, Giuseppe, i) *Formulario matematico,* Torino, 1908, pag. 8.
ii) *Principi di logica matematica, Opere scelte,* Roma, 1858. Vol. II (31).
iii) *Eguale, Opere scelte,* Roma, 1858, Vol. II (1984).
iiii) *I principi di geometria logicamente esposti - Opere scelte,* Roma, 1858, vol. II (18).
[13] Pieri, Mario, *Della geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo. Monografia del punto e del moto.* 1898-99.
[14] Staudt, Georg Karl K. von - *Geometrie der Lage.*
[15] Tannery, Paul, *Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide.* «Bull. soc. math. et astr» 1884.
[16] Tommaso D'Aquino, *Summa Theologica,* Pars I. Quaestio XL, art, 1, 3.
[17] Veronese, Giuseppe, *Fondamenti di geometria. Introduzione,* Cap. I Padova, 1891.