CARLO FELICE MANARA

La diramazione in questioni, anche elementari, di Geometria

Estratto dai
"Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano"
Vol. XX (1949)

1950
LIBRERIA EDITRICE POLITECNICA
DI CESARE TAMBURINI FU CAMILLO
MILANO
Via Pascoli, 55 - Via Manzoni, 50

CARLO FELICE MANARA

La diramazione in questioni, anche elementari, di Geometria

SUNTO. — *Si espongono alcune questioni, di attuale interesse, relative alla teoria dei piani multipli, e si richiamano varie connessioni che questa teoria presenta con alcuni campi della geometria elementare.*

I. - Le funzioni algebriche di una variabile ed il concetto di diramazione.

Che si parli di diramazione in questioni di geometria algebrica appare naturale, anzi si potrebbe quasi dire inevitabile; forse un poco inaspettato può sembrare che si parli di diramazione a proposito di geometria elementare. È pertanto nostra intenzione non solo di esporre brevemente alcune questioni di geometria algebrica di importanza attuale, relative a problemi di esistenza di funzioni algebriche di più variabili, ma anche di soffermarci su alcune questioni di geometria elementare inaspettatamente collegate con quelle, dimodochè per chiarirle a fondo e rivelarne l'intima essenza appare molto utile (per non dire necessario) il ricorso ad un concetto che sembra a prima vista di stretta pertinenza della geometria superiore.

Ricordiamo anzitutto che cosa si intende per diramazione di una funzione algebrica di una variabile; come è noto una tale funzione $y(x)$ viene definita implicitamente da una relazione:

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

dove F è un polinomio nelle due variabili complesse x ed y i cui coefficienti possono essere comunque complessi.

Ad un valore qualunque (s'intende complesso) di una delle variabili, per es. ad un valore x_0 della x, la (1) fa corrispondere n

valori di y – se n è il grado massimo con cui la y stessa compare nel polinomio (1) – radici della equazione

$$F(x_0, y) = 0 \tag{2}$$

Se F è irriducibile (come è il caso più comune a cui ci vogliamo qui limitare) tali radici sono tutte distinte, purchè x_0 sia generico, cioè eviti al più un numero finito di valori $x_1, x_2, \ldots x_m$ che, come è noto, sono radici di una ben determinata equazione in x

$$R(x) = 0 \tag{3}$$

che si ottiene eliminando y tra la (1) e la equazione

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Quanto abbiamo detto ammette anche, come è noto, una esposizione con linguaggio geometrico. Si suol anche dire che la (1) è l'equazione di una curva algebrica i cui punti sono dati da tutte le infinite coppie di valori complessi x, y soddisfacenti alla (1) stessa. È tuttavia noto che l'ente « curva algebrica » nella sua totalità è rappresentato dai punti di un continuo bidimensionale – la cosiddetta superficie riemanniana della curva stessa – e pertanto non coincide affatto con l'ente « curva » quale ce lo rappresenta la nostra intuizione geometrica; e tanto meno con la curva piana che si può ottenere fissando una coppia di assi cartesiani ed assumendo come punti della curva quei punti del piano le cui coordinate cartesiane x, y siano le eventuali coppie di valori reali soluzioni della (1) stessa.

Esorbita dal nostro assunto attuale il precisare tale linguaggio geometrico, come pure il valutare i pregi ed i difetti dei vari modelli reali di curve algebriche: ci limitiamo a ricordare che sull'argomento esiste nei Rendiconti di questo stesso Seminario una conferenza di O. Chisini [1]. Noi useremo anche di tale linguaggio geometrico perchè è comodo ed anche rigoroso, quando sia usato con le dovute cautele; parleremo di punti della curva (1) nel senso sopra precisato e diremo per es. che la equazione

$$x = x_0 \tag{4}$$

rappresenta, al variare di x_0, le rette di un fascio, tutte parallele all'asse delle y ecc.

È noto che, sempre supposto che il valore x_0 che compare nella

---

[1] Cf. O. Chisini - *Immagini visive delle curve algebriche*, Rend. Sem. Milano, Vol. X, 1936.

(2) sia generico, esistono n sviluppi in serie di potenze di $(x - x_0)$ convergenti in opportuni intorni non nulli del punto x_0, nel piano della variabile complessa x; tali sviluppi rappresentano n rami di funzione analitica $y_1(x)$, $y_2(x)$ ... $y_n(x)$ soddisfacenti identicamente alla equazione

$$F(x, y_i(x)) = 0 \qquad (i = 1 \ldots n)$$

Se si prolungano analiticamente queste serie (o rami) nel piano della variabile complessa x lungo un cammino chiuso λ che parta da x_0 e vi ritorni evitando i valori $x_1, x_2, \ldots x_m$ di cui sopra, si ottengono al ritorno ancora n rami di funzione analitica che coincidono con quelli di partenza a meno dell'ordine. Precisamente ad ogni cammino λ corrisponde una certa sostituzione sugli n rami, che diremo brevemente « prodotta » dal cammino stesso, sostituzione che dipende essenzialmente dal fatto che il cammino λ circonda oppure no certi punti, che stanno tra i punti $x_1\, x_2 \ldots x_m$, detti punti critici o di diramazione; diramazione chiamandosi appunto il fenomeno descritto, in base al quale le determinazioni della funzione y vengono scambiate tra loro con prolungamento analitico lungo un opportuno cammino chiuso. E non è inutile ricordare che nell'ipotesi, da noi sopra ammessa, che il polinomio $F(x, y)$ sia irriducibile, esiste sempre nel piano della variabile complessa x un cammino λ tale che per prolungamento lungo di esso una qualunque determinazione y_i venga portata in un'altra qualunque y_k prefissata.

Nei casi più comuni, di cui ci vogliamo qui interessare soltanto, ed a cui d'altronde ci si può sempre ridurre con opportune semplici operazioni sulle variabili, le sostituzioni che corrispondono ai cammini circondanti un unico punto di diramazione sono semplicemente degli scambi tra due rami della y. È chiaro anche che qualunque cammino chiuso si può ridurre, con deformazione continua che non gli faccia attraversare alcun punto critico, alla somma di un certo numero di cammini elementari, detti cappi, ognuno dei quali circonda un solo punto critico e tali che due qualunque tra loro non hanno punti in comune, all'infuori di x_0. Si suol dare a questi cappi una forma elementare molto semplice, riducendosi ognuno di essi ad una linea l che partendo da x_0 arriva fin nelle vicinanze di un punto critico e ad un cerchietto che circonda il punto stesso (fig. 1); intendendosi il cappio percorso da x_0 lungo l fino al cerchietto suddetto, poi lungo il cerchietto stesso, ed infine lungo l in senso opposto al precedente fino ad x_0.

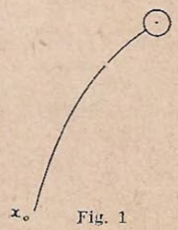

Fig. 1

È sempre possibile far sì che le tangenti in x_0 alle varie linee

l siano tutte distinte tra loro; i cappi si potranno allora ordinare per es. in corrispondenza all'ordine in cui si succedono le tangenti suddette in relazione ad un certo senso di rotazione attorno ad x_0; si potrà così parlare di cappi successivi, contigui ecc. E si possono dare delle configurazioni canoniche del sistema dei cappi sì che gli scambi da essi operati siano di volta in volta disposti nel modo più semplice ed opportuno.

L'esempio più elementare di una funzione algebrica y della variabile x che ammetta diramazione è data dalla funzione a due valori (curva iperellittica) cioè dalla funzione definita da una equazione

$$a(x)\,y^2 + 2\,b(x)y + c(x) = 0 \tag{1'}$$

di 2° grado in y i cui coefficienti sono polinomii in x. Resta naturalmente sempre inteso che supponiamo irriducibile il polinomio che sta a primo membro della (1′), ossia supponiamo che tale polinomio non possa ottenersi come prodotto di altri due di primo grado in y, coi coefficienti razionali in x.

È noto che in questo caso il polinomio $R(x)$ che figura al primo membro della (3) è dato molto semplicemente da

$$D(x) = a\,c - b^2 \tag{3'}$$

e che le radici della (1′) sono funzioni razionali dei coefficienti della (1′) stessa e della radice quadrata del polinomio $D(x)$. Una analisi molto semplice porta a concludere che partendo da un valore x_0 che sia generico, cioè non coincida con nessuna delle radici di $D(x)$ ed in corrispondenza al quale pertanto i due valori di y forniti dalla (1′) siano distinti – diciamoli y_1 ed y_2 – e prolungando analiticamente tali valori lungo un cammino λ del piano della variabile complessa x, i due valori che si avranno al ritorno coincidono con y_1 ed y_2 oppure sono quegli stessi scambiati tra loro, a seconda che il cammino λ circondi un numero pari (zero incluso) oppure dispari di radici di $D(x)$. Dove si intende che un cammino circondante una radice multipla vale come la somma di tanti cammini circondanti una radice semplice quanto è il grado di moltiplicità della radice stessa; e così, in particolare, un cammino circondante una radice doppia di $D(x)$ non produce diramazione, giacchè vale come due cammini, ognuno dei quali produce lo scambio tra le due determinazioni di y.

Quest'ultima osservazione è particolarmente importante e vale con le debite avvertenze anche quando la funzione algebrica abbia più di due valori; precisamente, anche in tale caso, un cammino chiuso λ che giri attorno ad una radice doppia di $R(x)$ non dà diramazione, purchè tale radice doppia possa considerarsi generata dall'avvicinarsi indefinito di due radici semplici di $R(x)$ stesso tali che i cappi che le circondano diano lo stesso scambio tra le determinazioni di y quando siano contigui, nel senso sopra precisato.

Osserviamo anche che il polinomio $D(x)$ che figura al primo membro della (2') è essenzialmente di grado pari; qualora ciò non avvenisse in realtà, si deve intendere che tra i valori di diramazione sia compreso anche il punto all'infinito del piano della variabile complessa x.

II. - I problemi di geometria elementare e le funzioni algebriche.

Quanto precede, benchè notissimo a chiunque possegga anche solo gli elementi della teoria delle funzioni di variabile complessa, può ritenersi poco pertinente al campo della geometria elementare. È bensì vero che la maggior parte, per non dire la quasi totalità, dei problemi di geometria elementare può impostarsi analiticamente per mezzo di equazioni algebriche, e queste ultime venir ricondotte in definitiva alla forma (1). In tali casi per es. si possono ridurre tutti i dati del problema a certi segmenti $x_a, x_b, \ldots x_s$ e le incognite a certi altri segmenti y le cui misure, in una determinata unità, sono legate a quelle dei segmenti dati da certe equazioni algebriche che traducono le relazioni assegnate dal problema; equazioni che permetteranno, se il problema è determinato, di dedurre le incognite dai dati. È chiaro che si potrà allora ridursi, per via di successive eliminazioni, allo stadio per noi finale, in cui una incognita — diciamola ancora y — sia legata algebricamente ai dati $x_a, x_b \ldots x_s$; e tra questi noi potremo considerare fissi tutti meno uno, diciamolo semplicemente x. Avremo pertanto a questo stadio una equazione algebrica

$$E(x, y) = 0 \tag{5}$$

legante appunto y ad x; equazione i cui coefficienti sono naturalmente funzioni degli altri dati che abbiamo preventivamente fissati.

La relazione (5) permetterà di determinare come varia la incognita scelta y (variabile dipendente) in funzione del dato scelto x (variabile indipendente) e naturalmente per quei fissati valori degli altri dati; e quindi di discutere il problema determinando quante ne siano le soluzioni, sotto quali condizioni esse siano reali ecc.

Ma a prima vista, anche qualora le soluzioni della (5) fossero più di una, non sembrerebbe potersi verificare il fenomeno della diramazione, giacchè per esso è necessario, come abbiamo visto, un cammino nel piano della variabile complessa x che racchiuda nel suo interno qualche punto di diramazione; e si potrebbe esser indotti a pensare che tale cammino debba necessariamente svolgersi in punti in cui la x (e quindi nel nostro caso il dato scelto) non è reale. Se così fosse non si potrebbe parlare di diramazione nel campo elementare, essendo questo legato necessariamente a valori reali delle variabili (indipendenti o dipendenti).

Ma un semplice esempio caratteristico ci convince che questa analisi è affrettata e pertanto non coglie nel vero.

Consideriamo invero per es. il problema elementare molto semplice che consiste nella ricerca delle bisettrici di un angolo dato.

Siano o ed a due rette e diciamo O il loro punto comune (fig. 2). Se vogliamo impostare algebricamente il problema della ricerca delle due bisettrici b_1 e b_2 dell'angolo $\widehat{oa}$ possiamo fare per es. così: scegliamo sulla retta o un punto U diverso da O e per U mandiamo la retta r normale alla o; fissiamo sulla o il verso OU come positivo e sulla r scegliamo il verso positivo in modo tale che la o e la r, con le orientazioni positive, siano situate tra loro rispettivamente come gli ssi x ed y di un ordinario sistema cartesiano ortogonale. Fissiamo poi il solito verso anti-orario come positivo per le rotazioni. Allora, detto θ l'angolo $\widehat{oa}$ e detto A il punto intersecato dalla retta a sulla r, si ha per definizione

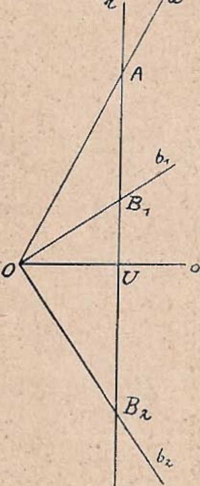

Fig. 2

$$\operatorname{tg} \theta = UA/OU$$

e, dalla trigonometria elementare

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2 \operatorname{tg} \theta/2}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta/2} \tag{6}$$

Detti ancora B_1 e B_2 i punti intersecati sulla r dalle bisettrici b_1 e b_2 e posto $x = \operatorname{tg} \theta = UA/OU$, ed $y_1 = UB_1/OU$, $y_2 = UB_2/OU$ in base alla (6) le y_1 ed y_2 risultano essere radici della equazione di 2° grado

$$x y^2 + 2 y - x = 0 \tag{7}$$

Quindi, considerata fissa la retta o e variabile la a e di conseguenza x, abbiamo che le y, cioè i parametri che nelle convenzioni da noi poste determinano le due bisettrici dell'angolo $\widehat{oa}$, sono i valori di una funzione algebrica di x.

Ora seguendo con una certa cura il variare dei punti B_1 e B_2

mentre la retta a ruota attorno al punto O, si vede che tali punti non soltanto si muovono con continuità (come è ovvio a priori) al variare con continuità della posizione della retta a, ma risultano scambiati tra loro quando la retta a ha compiuto un mezzo giro, venendo a sovrapporsi a sè stessa in modo che risultino scambiate tra loro le due semirette che hanno origine comune in O. In altre parole, i punti B_1 e B_2 risultano scambiati tra loro quando il punto A ritorna alla posizione iniziale dopo aver descritta in uno stesso senso tutta la retta r, ritenuta chiusa attraverso il punto improprio nel senso della geometria proiettiva.

Pertanto anche un'analisi superficiale e svolgentesi tutta nel campo della intuizione visiva porta a concludere che la funzione a due valori di questo nostro esempio dirama anche senza che la variabile indipendente (che nel nostro caso è la x) assuma valori non reali.

Il fatto si spiega anzitutto osservando che la funzione y definita dalla (7) ha due soli punti di diramazione, tra loro distinti, dati dai valori immaginarii puri $x = \pm i$, ed in secondo luogo facendo appello alle proprietà topologiche del piano della variabile complessa x. Esso infatti, come è noto, è topologicamente equivalente ad una sfera e l'asse reale è su di esso topologicamente equivalente ad un cerchio massimo della sfera stessa. Quindi se il punto rappresentativo del valore x percorre sul piano della variabile complessa tutto l'asse reale, esso percorre un cammino che è topologicamente chiuso e che si può considerare racchiudente nel suo interno uno qualunque dei valori $\pm i$ che sono di diramazione per la funzione $y(x)$ definita dalla (7).

Si vede quindi come anche nel semplice ed elementare problema della bisezione di un'angolo possa esser preso in considerazione il fenomeno della diramazione.

Analisi del tutto analoghe, seppure talvolta ovviamente più complicate, trovano posto nella discussione di svariati problemi di geometria elementare; vogliamo ricordare soltanto qui un classico problema di geometria del triangolo: quello di determinare un triangolo quando ne siano date le tre bisettrici (1). Ma non intendiamo dilungarci su questi argomenti che sono in certo modo introduttivi rispetto a quelli che abbiamo progettato di esporre.

---

(1) Cfr. per es. O. Chisini - *Sulla costruzione di un triangolo date le tre bisettrici*. Periodico di Matematiche, serie IV, vol. I, 1921.

III. - Le funzioni algebriche di più variabili.

Quanto è stato detto sopra a proposito delle funzioni algebriche di una variabile si estende in parte alle funzioni di più variabili indipendenti, mentre per altri rispetti deve essere profondamente modificato. Noi limiteremo qui il nostro accenno al caso di una funzione algebrica $z(x, y)$ di due variabili indipendenti e quindi definita implicitamente da un'equazione

$$F(x, y, z) = 0 \tag{8}$$

perchè, come ha dimostrato O. Chisini in lavori fondamentali sull'argomento, il caso delle funzioni algebriche di due variabili è, nell'ordine di questioni che qui ci interessano, in un certo senso il caso caratteristico delle funzioni algebriche di più variabili.

Supposto anche qui che il polinomio $F(x, y, z)$ sia irriducibile e detto n il grado massimo secondo cui z compare in esso, si ha che per una coppia generica x_0, y_0 di valori di x ed y le soluzioni della equazione

$$F(x_0, y_0, z) = 0 \tag{9}$$

sono tutte distinte. Questo invece non si verifica qualora la coppia x y non sia generica ma sia soluzione di una certa equazione

$$R(x, y) = 0 \tag{10}$$

che si ottiene eliminando la z tra la (8) e la

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Anche in questo caso useremo di un linguaggio geometrico, dicendo che l'equazione (8) rappresenta una superficie nello spazio riferito a tre coordinate cartesiane x, y, z e chiamando punti della superficie le terne di valori complessi soddisfacenti alla (8) stessa.

In tale immagine geometrica le condizioni $x = x_0$, $y = y_0$ rappresentano una retta parallela all'asse delle z ed avente come traccia sul piano $z = 0$ precisamente il punto P_0 di coordinate x_0, y_0; pertanto, ricordando che abbiamo supposto essere n il grado del polinomio F in z, ogni retta parallela all'asse delle z interseca la superficie F in n punti variabili al finito, punti che vengono proiettati dal punto improprio dell'asse z nel punto P_0. Diremo che la superficie F è rappresentata n volte, per proiezione dal punto improprio dell'asse z, sul piano $z = 0$, ovvero anche che la equazione (8) rappresenta un piano n-plo.

Si ponga ora nella (8) $y = mx$; si ottiene così una funzione algebrica z della sola variabile x, definita implicitamente dalla equazione

$$(8') \qquad F(x, m\,x, z) = 0$$

che avrà certi punti di diramazione; il luogo di questi punti, al variare di m è una certa curva

$$(11) \qquad \varphi(x, y) = 0$$

del piano x, y che vien detta curva di diramazione del piano n-plo (8). È chiaro che il polinomio $\varphi(x, y)$ che compare al primo membro della (11) è un divisore del polinomio $R(x, y)$ che figura al primo membro della (10). In linguaggio geometrico è chiaro che il porre $y = mx$ equivale a fissare un piano contenente l'asse delle z, piano che ha come traccia sul piano $z = 0$ precisamente la retta $y = mx$ e che seca la superficie F secondo una curva la cui proiezione sul piano $y = 0$ è rappresentata dalla (8').

È possibile stabilire delle convenzioni in base alle quali si dia, per ogni valore di m, un sistema di cappi del piano della variabile complessa x che circondano i punti di diramazione della funzione $z(x)$ definita dalla (8') partendo dal punto $x = 0$, in cui sono stati fissati i nomi delle determinazioni di z; in tal modo ad ognuno di questi cappi corrisponde uno scambio tra i valori della $z(x)$ stessa, e poichè ogni punto di diramazione circondato dai cappi suddetti appartiene alla curva di diramazione $\varphi(x, y)$ noi diremo anche che, con queste convenzioni, gli scambi di cui sopra sono deposti sui corrispondenti punti della curva φ.

Naturalmente invece di porre molto semplicemente $y = mx$ si può porre un legame algebrico più complicato

$$(12) \qquad f(x, y) = 0$$

tra le due variabili x, y; si ha allora, in presenza della (8), una funzione algebrica ad n valori dei punti della curva f, funzione i cui punti di diramazione, su di f, vanno cercati tra le intersezioni di f con φ. È chiaro che in questo caso le cose saranno assai meno semplici che nel caso in cui è stato posto $y = mx$. Infatti non è detto che sulla superficie riemanniana della f i soli cammini che possono produrre diramazione siano i cappi circondanti i punti di diramazione; ma saranno da prendersi in considerazione i cammini riemanniani sulla f, cioè i cammini chiusi non riducibili a punti. Ritorneremo in seguito su questi fatti per accennare ai problemi che sorgono. Fermiamoci ora un momento ad esporre brevemente qualche esempio, tra i più semplici, di piano multiplo ed i legami che sorgono tra queste ricerche e vari campi della geometria elementare.

IV. - I piani doppi e la geometria elementare.

Come è ovvio, l'esempio più semplice di piano multiplo è dato dal piano doppio, cioè da una funzione algebrica $z(x, y)$ a due valori, e pertanto definita da una equazione di 2° grado.

$$a(x,y)z^2 + 2\,b(x,y)z + c(x,y) = 0 \tag{8''}$$

i cui coefficienti sono polinomii nelle variabili x, y e per cui si suppone, come sempre, che il polinomio in z sia irriducibile.

Manifestamente il polinomio $R(x, y)$ che compare nella (10) è qui dato da

$$D(x, y) = b^2 - a\,c \tag{10'}$$

e la curva di diramazione $\varphi(x, y)$ della funzione z è ancora tale che il polinomio φ è divisore di D. È chiaro che essendo qui due soli i valori di z, su ogni punto della curva di diramazione è deposto sempre soltanto lo stesso scambio (12) tra di essi.

È facile verificare che qualunque curva algebrica φ del piano x, y purchè sia di ordine pari è di diramazione per un piano doppio, rappresentato doppiamente sul piano x, y.

Tuttavia già in questo caso si affaccia una interessante questione: detta φ la curva di diramazione di un piano doppio, rappresentato doppiamente sul piano x, y, abbiamo visto poco fa che per i punti di una qualunque curva $f(x, y)$ dello stesso piano risulta così definita una funzione a due valori, diciamola z_f. Ora si domanda: a quale condizione deve soddisfare la curva f affinchè la funzione z_f suddetta non dirami su f? Ovvero, in altre parole, perchè qualunque sia il cammino chiuso che vien percorso sulla riemanniana di f, mai i due valori di z_f vengano scambiati tra loro e quindi la z_f stessa non sia più *un'unica* funzione a due valori, ma si spezzi in *due* funzioni, ciascuna ad un solo valore?

Anzitutto è necessario che su f non vi siano punti di diramazione: poichè abbiamo detto che tali punti sono da ricercarsi tra le intersezioni di f con φ, occorre che queste vengano tutte a coincidere a coppie; infatti abbiamo visto che ad ogni punto di φ compete lo stesso scambio sui valori della funzione z e quindi in tal modo si viene a far sì che ogni cammino che abbraccia un punto di diramazione ne abbraccia anche un secoudo (infinitamente vicino al primo) e pertanto non produce nessun scambio tra i valori della z_f. Quindi la f deve essere tangente a φ dovunque la incontri.

Ma questa prima condizione non basta in generale. Occorre tener conto anche del fatto che in generale sulla f esistono dei cammini riemanniani, ed imporre anche che nessuno di questi produca diramazione. E questo si ottiene imponendo che i punti di contatto, i quali devono esaurire le intersezioni di f con φ, soddisfino a certi determinati legami (che sarebbe lungo precisare qui).

Quanto precede ammette applicazione anche nel campo reale e in vari rami della geometria elementare.

Un primo esempio di applicazione lo toglieremo dalla geometria descrittiva. Si consideri una quadrica, per es. per fissare le idee una superficie sferica Σ di cui scriveremo l'equazione in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, assumendo il raggio della sfera uguale all'unità di misura ed il centro sull'asse delle z a quota b.

$$x^2 + y^2 + (z - b)^2 - 1 = 0 . \tag{13}$$

Vista dal punto all'infinito dell'asse z la Σ presenta un contorno apparente: il cerchio φ^* giacente nel piano $z = b$ separante la calotta semisferica che diremo per intenderci superiore dall'altra che diremo inferiore. Abbiamo qui un caso tipico di piano doppio, giacchè, sempre per proiezione dal punto dell'infinito suddetto, ogni punto del piano x, y risulta immagine di due punti di Σ; ed invero la (13) definisce una funzione z algebrica a due valori di x, y avente come curva di diramazione il cerchio φ di equazione.

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

proiezione del cerchio φ^* contorno apparente e luogo delle traccie, sul piano x, y delle rette tangenti a Σ e parallele all'asse z.

Ora quanto abbiamo detto sopra permette anzitutto di giungere alla radice di una ben nota legge di geometria descrittiva, detta legge del contorno apparente: enunciata per semplicità a proposito della sfera Σ che stiamo trattando essa dice:

« I punti in cui una qualunque curva k^* tracciata sulla Σ incontra il contorno apparente φ^* relativo al punto improprio dell'asse z si proiettano sul piano x, y dal punto stesso in punti in cui la proiezione k di k^* è tangente alla proiezione φ di φ^* ».

Così per es. una sezione piana C^* di Σ, giacente su di un piano generico π si proietta in un'ellisse C che è bitangente al cerchio φ

nei due punti che sono proiezioni di quelli in cui π (e quindi C^*) interseca il contorno apparente φ^* di Σ.

La necessità di tale condizione appare ora chiara: ed invero, per riferirci al caso particolare dell'ellisse C, una conica qualunque H del piano x, y non potrebbe essere immagine di una sezione piana di Σ, perchè essa darebbe luogo ad una funzione algebrica z_H, a due valori dei punti della curva H, non spezzata perchè avrebbe come punti di diramazione le intersezioni di H con φ. Ossia la H sarebbe proiezione di una curva H^* di Σ non spezzata ed intersecata in due punti da ogni parallela all'asse delle z; tale curva H^* è più precisamente la quartica intersezione della sfera Σ con il cilindro quadrico avente generatrici parallele all'asse delle z e come curva direttrice la conica H; in ogni caso quindi non una curva piana. Perchè ciò sia occorre che la funzione z_H a due valori dei punti della curva H non dirami e quindi che le intersezioni di H con φ vengano a coincidere a coppie, come avviene appunto per l'ellisse C. Notiamo inoltre che, in questo caso molto semplice, la condizione che C sia bitangente al cerchio φ è non solo necessaria ma anche sufficiente perchè la funzione a due valori z_C sia spezzata, poichè non esistono sulla riemanniana di C dei cicli chiusi che non possano ridursi a punti, essendo C una curva razionale e pertanto la sua riemanniana topologicamente equivalente ad una sfera.

Una osservazione importante per il seguito che si deduce da quanto abbiamo detto ora è che la conica (ellisse) C bitangente al cerchio φ non è proiezione di una sola sezione piana della sfera Σ ma di due, le quali costituiscono assieme una quartica spezzata, sezione di Σ con il cilindro quadrico che ha come direttrice la C e le generatrici parallele all'asse z.

Questa osservazione permette per es. di rendersi conto appieno della soluzione di un problema, d'altronde molto semplice, di geometria descrittiva: date due sezioni piane C^* e D^* di Σ giacenti in due piani π, ε, esse si proiettano in due ellissi C e D ognuna delle quali è bitangente al cerchio φ (fig. 3). Ora nello spazio le intersezioni di C^* e D^* sono due, tante quante le intersezioni della sfera Σ con la retta comune ai due piani π ed ε, mentre sul piano x, y si hanno quattro intersezioni tra le due coniche C e D; quali tra queste quattro intersezioni rappresentano le due effettive intersezioni delle C^* e D^* e come è possibile determinarle? Da quanto abbiamo visto appare

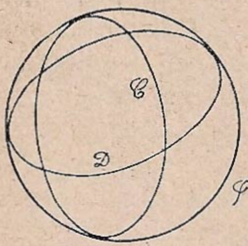

Fig. 3

chiaro che ciò è possibile, in quanto le C e D sono entrambe bitangenti a φ e quindi su ognuna di esse la funzione a due valori data dalla (13) è spezzata non potendo più venire scambiati tra loro i due rami mediante cammini che circondino un singolo punto di diramazione. Ciò è confermato del resto anche da una facile analisi nel campo reale; infatti su ogni ellisse è possibile determinare due archi, separati dai punti di contatto con φ; uno di essi corrisponde alla proiezione di un arco di sezione piana scorrente sulla calotta semisferica che abbiamo chiamata superiore, e l'altro necessariamente su quella inferiore, oppure viceversa; la scelta di una delle alternative corrisponde alla scelta di quella tra le due sezioni piane di Σ che si proiettano in ognuna delle due ellissi. Fatta tale scelta, su ognuna delle due ellissi C e D, è facile riconoscere che due soltanto tra le quattro intersezioni di C e D corrispondono, nello spazio, a intersezioni di archi correnti ambedue sulla calotta superiore oppure sulla inferiore di Σ, cioè a effettive intersezioni tra le due sezioni piane.

Una seconda interessante applicazione di questa teoria viene richiesta dalla geometria elementare in molti problemi che fanno intervenire la distanza di due punti di un piano; cosa quanto mai frequente, come è del tutto ovvio. È noto infatti che, fissato uno dei due punti, O, ed assuntolo come origine di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x, y la distanza z di P da O soddisfa alla relazione

$$z^2 - (x^2 + y^2) = 0 \tag{14}$$

Si deduce di qui che la z è una funzione algebrica a due valori di x, y, avente come curva di diramazione la conica $x^2 + y^2 = 0$ spezzata nella coppia di rette isotrope per O. Ora in geometria elementare si lavora sempre con una delle determinazioni di z, quella positiva; ma gli esempi che abbiamo dato sopra ci convincono che sarebbe imprudente trascurare l'esistenza dell'altra determinazione (quella negativa) per il solo fatto che la curva di diramazione del piano doppio definita dalla (14) è immaginaria. Si dànno infatti casi in cui solo un'analisi delicata, che tenga conto della teoria dei piani doppi, può chiarire paradossi e portare a buon fine la soluzione di problemi che rivelano difficoltà inaspettate. Valga, tra i tanti, l'esempio offerto dalla soluzione del classico problema di Apollonio, che consiste nel cercare i cerchi tangenti contemporaneamente a tre cerchi dati.

Si dicano G_1 G_2 G_3 i tre cerchi dati, O_1 O_2 O_3 i loro centri ed r_1 r_2 r_3 i loro raggi: uno dei modi per risolvere il problema è fornito dalle considerazioni seguenti (dovute a Newton): diciamo Γ un cerchio tangente per es. esternamente ai due cerchi G_1 e G_2 e sia P il suo centro; allora le distanze O_1P ed O_2P hanno una differenza che è data, in valore assoluto da $|r_1 - r_2|$. Quindi il centro P deve trovarsi su una conica (in questo caso una iperbole) avente i suoi fuochi in O_1 ed O_2. Ugualmente si ragiona quando si impone a Γ di essere tangente esternamente per es. a G_1 e G_3. Per determinare P si è dunque condotti alla ricerca delle intersezioni di due coniche aventi un fuoco in comune (nell'esempio che stiamo trattando O_1), e quindi bitangenti alla stessa conica degenere, formata dalle due rette isotrope per O_1. Ora si verifica facilmente che soltanto due tra le quattro intersezioni di tali coniche dànno soluzioni del problema; la ragione di tale fatto ed i criterii di scelta della soluzione si ottengono con considerazioni perfettamente analoghe a quelle che abbiamo svolto più sopra a proposito delle due coniche C e D entrambe bitangenti al cerchio φ; le analisi sono forse qui un poco più delicate per il fatto della immaginarietà della curva di diramazione del piano doppio.

Altre sei soluzioni del problema di Apollonio si ottengono poi considerando P come centro di un cerchio Γ che sia tangente esternamente ad uno ed internamente all'altro dei due cerchi G_1 e G_2, con che viene a trovarsi su un'altra conica avente i fuochi in O_1 e O_2 e così via esaurendo tutte le possibili scelte.

E tanto basti per far vedere come anche la geometria elementare non sia avara di problemi che per essere risolti e compresi appieno richiedono concetti e metodi che non si potrebbero dire del tutto elementari.

V. - La teoria dei piani multipli ed alcune questioni ad essa collegate.

Quando si passa dai piani doppi ai piani n-pli (con $n > 2$) le questioni che abbiamo visto sopra in relazione ai piani doppi si complicano, come è ovvio, ed altre nuove ne sorgono.

Uno dei problemi nuovi più importanti che sorgono per i piani n-pli è quello d'esistenza, che si suol formulare così: data una curva $\varphi(x, y)$, quali sono le condizioni a cui deve soddisfare perchè esista almeno un piano n-plo che la ammetta come curva di diramazione?

Questo problema non esiste per i piani doppi, perchè, come abbiamo detto, qualunque curva, purchè di ordine pari, è di diramazione per un piano doppio. Non così per i piani n-pli. Si conoscono infatti condizioni necessarie a cui debbono soddisfare le loro curve di diramazione; si sa per es. che esse debbono necessariamente possedere certe singolarità (nodi e cuspidi) e quante debbono essere. Ma queste condizioni non sono sufficienti, e valga per tutti l'esempio più elementare che ci fornisce la superficie del 3° ordine $\Phi_3(x, y, z) = 0$. Proiettandola da un punto, per es. (come abbiamo fatto con la sfera Σ poco fa) dal punto improprio dell'asse z, essa viene ad acquistare come contorno apparente una sestica gobba $\varphi_6{}^*$. Quest'ultima si proietta su di un piano generico, per es. sul piano x, y in una sestica piana φ_6 dotata di sei cuspidi, curva di diramazione del piano triplo su cui la Φ_3 viene rappresentata per proiezione. Ma non basta che una sestica piana possegga sei cuspidi perchè si possa considerare proiezione del contorno apparente di una superficie cubica. È inoltre necessario (e anche sufficiente) che le sei cuspidi soddisfino ad una determinata relazione che in questo caso molto semplice si traduce nell'appartenenza ad una stessa conica.

Per i casi successivi poi le condizioni sono molto più riposte ed in gran parte sconosciute. Esistono in proposito ricerche fondamentali di F. Enriques, O. Chisini, B. Segre, e nei Rendiconti di questo Seminario del 1942 si trova inserita una conferenza di O. Chisini in cui è esposto lo stato in cui si trovava la questione a quell'epoca ([1]). Dopo di allora sono stati fatti ulteriori progressi soprattutto nella caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli e quadrupli.

Per quanto riguarda i piani tripli, il problema è semplificato dalla circostanza che le loro curve di diramazione posseggono come singolarità necessarie soltanto cuspidi e pertanto la caratterizzazione si può conseguire determinando soltanto la posizione di esse.

Per questa via sono state caratterizzate le curve di diramazione dei piani tripli tali che tra il loro ordine m ed il numero k delle loro cuspidi interceda la relazione

$$3\ m^2 - 16\ k = 12\ h^2 \qquad \text{(con } h \text{ intero)}$$

Rimangono tuttavia altri casi su cui molto si ignora.

Quando poi le determinazioni della funzione algebrica diventano più di 3 la curva di diramazione deve necessariamente possedere anche dei nodi (almeno in generale). Le difficoltà quindi crescono ed anche il solo accennare ad esse ci porterebbe lontano dagli scopi e dal carattere che abbiamo voluto attribuire a questa conferenza.

Ritorniamo piuttosto ad un'altra questione su cui ci siamo soffermati a proposito dei piani doppi: la questione delle condizioni di spezzamento della funzione algebrica definita dal piano multiplo

([1]) Cfr. O. Chisini - *Sui teoremi d'esistenza delle funzioni algebriche di una e di due variabili*, Rend. Sem. Milano, Vol. XIV, 1942.

sui punti di una curva f. Abbiamo visto che, nel caso del piano doppio, è necessario e sufficiente che qualunque cammino chiuso effettuato sulla superficie riemanniana di f sia tale da non produrre scambio delle due determinazioni della funzione; ed a tal fine è necessario e sufficiente che la f sia tangente alla curva φ di diramazione del piano doppio ovunque la incontra e che inoltre il gruppo dei punti di contatto soddisfi a certi altri ben determinati legami che traducono algebricamente la condizione topologica che ogni cammino riemanniano chiuso su di f sia tale da circondare φ soltanto un numero pari di volte. Il fatto essenziale che rende in questo caso la soluzione del problema molto facile è che su tutti i punti della curva di diramazione è deposto lo stesso ed unico scambio tra i due valori della funzione.

Non così se le determinazioni di questa sono in numero maggiore di due. Consideriamo per fissare le idee un piano triplo e sia φ la sua curva di diramazione; questa volta sui punti di una curva qualunque f tracciata sul piano triplo è definita una funzione z_f che ha tre determinazioni, diciamole z_{f_1} z_{f_2} z_{f_3}. La questione più semplice che si presenta è questa: a quali condizioni deve soddisfare la f affinchè una determinazione — per es. z_{f_1} — non sia prolungabile analiticamente nelle altre?

Ora è chiaro che questa volta sulla curva di diramazione φ sono deposti, in punti diversi, diversi scambi fra le tre determinazioni di z. E sarà necessario che sulla riemanniana di f non esistano punti girando attorno ai quali avvenga lo scambio della determinazione z_{f_1} nelle altre; quindi la f deve essere tangente alla φ quando la incontra in punti su cui è deposto uno scambio che opera su z_{f_1}. A riprova di questo si consideri quanto avviene nell'esempio cui abbiamo accennato più sopra: quello del piano triplo che si ottiene proiettano da un punto generico una superficie cubica Φ_3. Abbiamo visto che tale piano triplo ammette come curva di diramazione una sestica φ_6 dotata di sei cuspidi che stanno su una stessa conica. Ora è noto che la superficie Φ_3 possiede 27 rette, ed è subito visto che esse si proiettano nelle 27 bitangenti della φ_6; ognuna di queste bitangenti interseca pertanto φ_6 in altri due punti, oltre ai due di contatto, ed è chiaro che gli scambi che competono a questi ultimi due sono diversi da quelli che competono ai due di contatto. E infatti consideriamo per es. una di queste bitangenti, diciamola r e consideriamo la funzione algebrica definita dal piano triplo sui punti di r, ovvero la sezione della superficie Φ_3 operata col piano passante per r e parallelo all'asse delle z. Questa sezione è visibilmente spezzata nella retta r^* che si proietta appunto nella r ed in una conica h^* che si proietta doppiamente nella

r stessa. Questa conica ha due punti di diramazione, che corrispondono alle intersezioni semplici di r con φ_6 mentre le intersezioni di r^* con h^* corrispondono ai punti di contatto di φ con r.

Si presenta quindi la questione di distinguere in qualche modo gli scambi che sono deposti sui varii punti della curva φ di diramazione di un piano n-plo. La cosa non sembra semplice in generale, ma almeno per quanto riguarda i piani tripli, una via per giungere alla meta appare essere la considerazione delle forme limiti a cui possono ridursi le loro curve di diramazione. Per le curve di cui abbiamo parlato sopra e di cui si conosce la caratterizzazione, tali forme limiti sono note. Esse possono sostanzialmente considerarsi costituite da due curve contate doppiamente; una su cui è deposto un certo scambio fra le determinazioni per es. lo scambio (12), l'altra su cui è deposto uno scambio concatenato col precedente per es. (13).

Non siamo ancora in possesso di forme limiti significative per curve più complicate, se non in alcuni casi particolari; e sarebbe troppo lungo e non troppo interessante enumerarli qui.

Quanto abbiamo detto finora basti per dare un'idea di un campo di ricerche che, se non è privo di difficoltà, si presenta suggestivo ed anche non privo di applicazioni a prima vista inaspettate.

1950
— STAMPERIA —
CESARE TAMBURINI
— FU CAMILLO —
VIA PASCOLI, 55
— MILANO —