LA DIMENSIONE UMANISTICA DELLA MATEMATICA: PROBLEMI DELLA RICERCA E DELLA DIDATTICA

CARLO FELICE MANARA *

Estratto dalla Rivista « *Ricerca scientifica ed educazione permanente* »
dell'Università degli Studi di Milano
Anno III - N. 1 - 1976

* Istituto di Matematica dell'Università degli Studi di Milano.

1) Può sembrare abbastanza strano che si parli di una dimensione umanistica della matematica; invero questa scienza è sempre stata considerata come astratta, e in certo senso distaccata dalle vicende umane. Essa ha suscitato e suscita ancora oggi difficoltà e repulsioni anche in persone d'altronde intelligenti e colte: capita spesso di incontrare delle persone che quasi si vantano di « non capire niente » della matematica, ma tuttavia si rifugiano in una comprensione dell'uomo e dei suoi problemi, della cultura e del pensiero, che sottintendono indipendente e quasi superiore alla matematica. Spesso anche i cultori di questa scienza sono considerati con una specie di ammirazione (non sempre totalmente giustificata) e spesso come persone dalla psicologia forse un po' distorta e dalla mentalità apodittica e astratta. Chi scrive ricorda un episodio abbastanza indicativo in questo ordine di idee: un matematico di valore stava parlando ad un pubblico misto, in una riunione in cui si doveva discutere sul carattere di una nuova facoltà universitaria che si stava istituendo. Ad un certo punto l'oratore, parlando della propria scienza, affermò che il matematico per natura sua è una delle persone più accomodanti del mondo, e che è disposto a discutere su tutti i possibili sistemi di ipotesi, purché siano coerenti e non contradditori. L'affermazione del collega, per quanto ben fondata, come cercherò di far vedere nel seguito, suscitò dei sorrisi di compatimento tra le persone del pubblico, ed anche un mormorio di meraviglia; invero gli ascoltatori, quasi tutti cultori di scienze giuridiche, politiche ed in generale « umanistiche », non si rendevano conto del significato della affermazione e consideravano l'oratore con un compatimento mal celato: forse pensavano di avere il monopolio della profondità di pensiero e della adattabilità alla « realtà » umana e politica, o forse anche pensavano che nessuna formazione diversa dalla « umanistica » potesse conferire la capacità di comprendere le cose dell'uomo.

Questa mentalità, che è abbastanza diffusa, può dar luogo a dispute senza molto senso, come quella, ricorrente a periodi, delle « due culture »; questione sulla quale molto inchiostro è stato versato e non sempre in modo giusto.

Ma questo modo di vedere le cose dà luogo anche ad un atteggiamento abbastanza comune nelle scuole; secondo questo atteggiamento la matematica viene spesso considerata come una specie di « male necessario », una materia che si deve insegnare perché fa parte ormai della nostra vita associata ed è uno strumento utilissimo per la scienza; ma la materia viene considerata come fondamentalmente strumentale, accessoria, ed in particolare si trascura la parte che essa può avere per la formazione dell'uomo e del cittadino.

Invero ben poche persone sanno quanta inventiva, quanta fantasia, quante qualità creative che hanno molto dell'arte, vengano impiegate nella scoperta matematica; ben poche persone hanno la convinzione del fatto che la matematica è una dottrina vivente, che cresce e cambia le proprie impostazioni ed i propri metodi. Molte tra le persone colte hanno della matematica la conoscenza che loro viene dai banchi del Liceo e quindi hanno la convinzione che la matematica si sia fermata alle strutture dell'epoca di Euclide e che abbia avuto dopo di allora solo uno sviluppo del tutto lineare: uno sviluppo che consiste nell'aggiungere teoremi a teoremi (con quale concatenamento con la realtà non si sa) senza tuttavia mutare atteggiamento e metodi. È noto infatti che la matematica viene insegnata nelle scuole e presentata nella trattatistica abituale come una dottrina fissata, che parte da certe premesse e giunge alle conclusioni in modo ineccepibile, con calcoli o con ragionamenti rigorosi.

E d'altra parte questo tipo di didattica appare quasi necessario perché la matematica possa avere tutto il suo aspetto formativo: invero una presentazione cosiffatta raggiunge uno degli scopi dell'insegnamento e precisamente quello di presentare le idee chiare ed astratte e di allenare al ragionamento rigoroso.

Rimane tuttavia il fatto che nella trattatistica si perde molto spesso il carattere euristico delle singole proposizioni e delle teorie; e ciò proprio perché la presentazione della materia è fatta in modo da essere assolutamente rigorosa e quindi in modo tale da far pensare al mondo platonico delle idee, mondo sul quale il tempo non ha presa, e in cui tutto è chiaro e preciso.

2) Le considerazioni che abbiamo svolto fin qui potrebbero far pensare che alcuni problemi riguardanti la didattica della matematica siano di difficile soluzione, o addirittura conducano ad una specie di circolo vizioso.

Infatti si potrebbe dire che il valore formativo della matematica è dato proprio principalmente dal suo rigore formale, il che in certo senso obbliga a presentare la materia in modo astratto e rigoroso: di conseguenza è abbastanza facile che si perda nell'insegnamento la dimensione storica, ed insieme anche la dimensione umana della ricerca scientifica.

E, d'altra parte, pare sia da escludere che la matematica, come una qualunque delle scienze della natura, possa essere insegnata seguendo esattamente nella esposizione il suo sviluppo storico.

In modo analogo nessuno penserebbe di presentare la chimica esponendo prima la teoria del flogisto e poi presentando la teoria atomica: le stesse cose si debbono poter dire delle altre scienze, alle quali pare negata la dimensione storica, almeno nella presentazione che se ne fa nelle scuole secondo la didattica abituale.

Tuttavia persistiamo a pensare che qualche cosa possa essere fatto, per dare ai discenti almeno la ragione della attuale struttura della scienza, e per presentare i problemi da cui questa struttura ha avuto la sua origine.

Per poter spiegare meglio quello che intendiamo dire, vorremmo fare un esempio: nella geometria razionale, così come si esponeva qualche decennio fa nelle scuole secondarie, si trovava, accanto a qualche teorema che risale al tempo di Euclide, l'enunciato del postulato della continuità, che è maturato nel secolo XIX. È chiaro che l'enunciato del postulato della continuità risulta necessario per dare alla esposizione della geometria il suo pieno rigore, in particolare per dare senso ai problemi della rettificazione della circonferenza, ed in generale ai problemi della misura delle lunghezze di linee non costituite da segmenti rettilinei in numero finito e delle aree delle figure a contorno non rettilineo.

Tuttavia si potrebbe anche pensare ad un insegnamento nel quale, insieme con il postulato della continuità nella sua forma rigorosa, fosse anche presentato, sia pure per sommi capi, l'ambiente scientifico e culturale nel quale è maturata la necessità di enunciare tale postulato in una delle forme che oggi conosciamo.

Penso che non sia difficile dire alle scolaresche che la formulazione attuale del postulato della continuità è il risultato della elaborazione critica di una nozione di continuità che veniva considerata come « intuitiva » ed accettata, senza ulteriori analisi, su questa motivazione. E che, d'altra parte, questa nozione pretesa come « intuitiva » della continuità era basata su un'altra idea di continuità che veniva attribuita alla materia studiata dalla fisica; che la concezione della materia come costituita di atomi e quindi, in tempi più recenti, della energia come avente struttura granulare, ha in qualche modo demolito il concetto della materia come continua, ed ha lasciato la continuità come una delle proprietà di certi enti della geometria che si suppongono assolutamente privi di lacune.

Che, infine, l'enunciato del postulato della continuità della retta appartiene ad un periodo che si potrebbe dire conclusivo di un lungo travaglio di critica dei principi della analisi matematica, di revisione dei suoi procedimenti, di sistemazione rigorosa di tutta la dottrina, molta parte della quale era prima lasciata alla « intuizione » così come si faceva nei tempi che si potrebbero chiamare « eroici » della analisi matematica.

3) Le considerazioni che abbiamo svolte potrebbero rientrare nel quadro di un problema che viene frequentemente dibattuto: si tratta del problema della cosiddetta « motivazione » del discente. Nel caso della matematica si tratterebbe di stimolare il discente, cioè di interessarlo, di convincerlo che quella fatica — spesso improba e scomoda — che egli deve fare per imparare il linguaggio della ma-

tematica e la sua struttura è degna di essere superata.

Una delle soluzioni che vengono spesso prospettate è quella di presentare l'utilità dello studio della matematica; invero una delle obiezioni che vengono fatte molto spesso all'insegnamento della matematica astratta è quella che essa « non serve a niente ». Ad esempio, si trova spesso ripetuto che ad un avvocato non interessa conoscere il teorema di Pitagora, perché non dovrà mai servirsene; di qui ad affermare che è inutile insegnare il teorema di Pitagora il passo è breve, ed è stato anche fatto spesso. Ma — ribatteva un matematico di una certa rinomanza — l'argomento si può anche rovesciare; si potrebbe sostenere che coloro i quali avranno bisogno del teorema di Pitagora nella vita professionale (per es. i fisici o gli ingegneri) avranno molte occasioni per incontrarne la dimostrazione. Ma l'avvocato ha quella unica occasione nella sua vita di incontrare un ragionamento astratto, formalizzato e rigoroso.

Supponiamo per il momento superata la prevenzione contro l'opportunità dell'insegnare la matematica anche alle persone che non ne debbono usare nella loro professione; è chiaro tuttavia che la ricerca di una motivazione nella direzione che porta a mettere in luce la « utilità » della matematica conduce presto a delle situazioni difficili: da una parte infatti si è condotti ad una continua ricerca di una realtà fisica da descrivere con determinati strumenti matematici, il che non è sempre facile né radicalmente utile alla comprensione dello strumento matematico. E d'altra parte, al limite, si rischia di presentare la matematica come una raccolta di ricette, di procedimenti, di formule talvolta non fondate e spesso malamente giustificate, la cui dimostrazione è lasciata agli specialisti e che importa soltanto di saper applicare.

In questo ordine di idee abbiamo presente per esempio i problemi dell'insegnamento della matematica a livello universitario, presso i corsi di laurea che necessitano di conoscenze di matematica « superiore » come i corsi di laurea in fisica o in ingegneria.

In questi corsi appare quasi necessario presentare tutto lo strumentario di quella che si suole chiamare la matematica superiore o quasi (strumentario che oggi si riduce presso di noi alla geometria analitica ed ai rudimenti dell'analisi matematica, fino al calcolo differenziale ed integrale delle funzioni di più di una variabile) molto tempo prima che l'allievo ne veda le applicazioni, e quindi si senta motivato da queste allo studio della struttura del linguaggio astratto che egli deve utilizzare per la conoscenza scientifica del mondo che gli interessa per la sua professione.

Pertanto risulta difficile risolvere il problema pedagogico di stimolare l'interesse di chi non ha molta predisposizione, di modo che lo studio di quella matematica superiore « che serve », a questo livello viene spesso sentito come una imposizione di cui non si vede bene la ragione; ne consegue che lo studio viene spesso fatto di malavoglia, i programmi vengono « contestati » (secondo la terminologia oggi in voga) e lo studente deve impegnarsi sulla fede di chi gli assicura che lo sforzo mentale che egli fa oggi gli sarà utile in futuro. Vale la pena di ricordare che spesso, quando quel futuro diventa presente, cioè quando lo studente si trova a dover utilizzare lo strumentario teorico che ha dovuto apprendere, egli ha dimenticato molto di questo strumentario.

Si potrebbe dire che questa dimenticanza è quasi fatale, perché dipende proprio dal fatto che l'insieme delle nozioni impartite non è diventato un fatto di cultura in coloro che le hanno ricevute.

Va osservato che problemi analoghi esistono a tutti i livelli di insegnamento e portano a soluzioni varie e non sempre valide. Per esempio, per quanto concerne la matematica, molti sono gli studi che riguardano la fascia scolastica nella quale, per programma, non viene richiesto un insegnamento razionale ma soltanto un insegnamento a livello cosiddetto « intuitivo ».

A questo livello viene preso spesso in considerazione l'uso di « sussidi audiovisivi » che dovrebbero risolvere il problema del propinare la matematica ai discenti senza fatica mentale e con chiarezza; duole di dover dire che spesso il risultato di questi tentativi potrebbe essere classificato come « matematica a fumetti », che ha perso tutto il carattere formativo al rigore della matematica per conferirle soltanto il carattere di insieme di procedimenti per trattare problemi pratici senza cura della astrattezza e del rigore.

Può apparire singolare che ciò avvenga proprio oggi, cioè in un'epoca in cui da parte di certe scuole di matematici si vorrebbe esaltare il formalismo in nome del rigore e si tende a deprezzare l'insegnamento tradizionale della geometria col pretesto che questa dottrina non è rigorosa. In questo ordine di idee viene alla mente quella frase programmatica enunciata tempo fa dal Dieudonné: « A' bas Euclide, à bas le triangle »; frase che ha un senso se intesa nella direzione di un rinnovamento dell'insegnamento della matematica, ma ha indotto qualcuno a dimenticare tutto il carattere formativo che lo studio della geometria ha, almeno per certe menti, ed ha nascosto il fatto che, come vedremo, la geometria ha un suo senso ed un suo rigore, ed in più può valersi della potenza creativa della invenzione fantastica e della immaginazione.

4) Ciò che abbiamo esposto brevemente fin qui porterebbe a pensare quanto sia grande la difficoltà di « motivare » l'apprendimento della matematica, soprattutto tenendo presente il modo in cui questa materia è inserita nel nostro sistema scolastico. Si potrebbe pensare che non esistono soluzioni valide per tutti i casi, né ricette miracolose per risolvere il problema rapidamente; tuttavia un certo sforzo potrebbe forse essere fatto nella direzione che porta a cercare di presentare il posto che la matematica ha nella cul-

tura contemporanea, la parte che essa ha nella fondazione del pensiero scientifico che è essenziale al nostro modo di pensare e di vivere una vita civilizzata; in altre parole si potrebbe cercare di presentare una componente umanistica della matematica che forse non viene sempre completamente messa in luce.

Anzitutto, e da un certo punto di vista, si potrebbe dire che uno dei problemi principali della matematica è stato quello di trovare una espressione simbolica dei concetti che venivano trattati. Non vogliamo addentrarci nella discussione (che sarebbe qui fuori luogo) sui rapporti tra il pensiero e la sua espressione verbale o grafica. Ma ci pare di poter dire che una delle caratteristiche della matematica di oggi sia quella di essere una codificazione di certe idee; codificazione che ha certe sue proprietà e certe sue leggi sintattiche che ne sono un elemento fondamentale. Ciò è visibilissimo nella aritmetica elementare, che ci porta alla rappresentazione dei numeri interi (cardinali) o delle frazioni, e ad imparare le leggi delle operazioni sui simboli grafici dei numeri stessi; molto spesso tali leggi non vengono neppure motivate; certo ciò non avviene a livello della scuola elementare nella quale si insegnano i rudimenti della grammatica della lingua materna, ma non si danno le regole del linguaggio matematico che come precetti e direttive rigorose.

Tuttavia l'importanza della acquisizione di un linguaggio cosiffatto è testimoniata da tutta la struttura della nostra civilizzazione scientifica, ed ha trovato la sua espressione con una celebre pagina di Galileo che si legge in tutte le antologie di storia della filosofia e del pensiero scientifico.

Vorremmo aggiungere in più che la matematica, oltre a fornire il linguaggio con il quale la scienza parla, tende sempre più a diventare lo schema astratto ideale della scienza in generale.

Questa affermazione potrebbe essere considerata come azzardata e dettata da una specie di eccessivo « patriottismo di materia »; ma vale la pena di osservare che molto spesso il progresso di una scienza va di pari passo con la formazione di un linguaggio specializzato e preciso della scienza stessa. Questo fenomeno è visibilissimo nelle scienze che hanno adottato un sistema di simboli: la fisica, per esempio, attualmente ha adottato la simbologia matematica come suo linguaggio per così dire ufficiale. Il che significa anche che le procedure per la deduzione delle conseguenze delle ipotesi sono semplicemente le leggi del linguaggio matematico: le leggi dell'algebra ordinaria, dell'analisi matematica oppure anche le leggi dell'algebra astratta e dei rami più moderni della matematica (teoria dei gruppi, dei corpi sghembi, ecc.) che non sempre coincidono con le leggi della matematica « classica », ma che vengono adottate per rendere certi aspetti della realtà fisica che non sono raggiungibili con la matematica classica. Ma si può ricordare anche la chimica, che da tempo ha escogitato un suo sistema di simboli e che ha sviluppato anche una specie di sintassi di questi simboli. Tuttavia la tendenza alla formazione di un linguaggio specializzato è evidente anche nelle scienze nelle quali viene utilizzato il linguaggio comune; il fenomeno che si può osservare è che anche le parole del linguaggio comune vengono utilizzate in senso « tecnico » e specializzato, ben circoscritto e precisato; oppure addirittura (come è il caso della medicina) vengono foggiate parole apposite (magari utilizzando radici greche o latine) per evitare le parole del linguaggio comune, che hanno quasi sempre un significato sfumato o determinato principalmente dal contesto.

Ora questa tendenza alla simbolizzazione astratta ed artificiale in misura più o meno grande è tipica della matematica, che stabilisce la propria simbologia e che stabilisce le regole per manovrare i propri simboli in modo del tutto libero, con il solo legame di salvare la coerenza e di evitare la contraddizione.

Ma c'è tuttavia anche un altro aspetto, secondo il quale si potrebbe sostenere che la matematica costituisce il quadro ideale del sapere scientifico del nostro tempo; invero l'aspetto tipico secondo il quale ci si presenta una teoria matematica è quello di un sistema ipotetico deduttivo, ovvero anche di un sistema « assiomatico ». Questo modo di denominare le cose ha fatto sorgere molti equivoci ed ha condotto delle persone sprovvedute a pensare che la matematica fosse il tipico sistema nel quale non si può cambiare nulla e che pretende di imporsi con una assoluta evidenza. Forse qui sta l'origine di quei sorrisi di compatimento di cui ho parlato all'inizio, a proposito degli « umanisti » che ascoltavano la conferenza del matematico. Ma in una teoria matematica si suole indicare con il termine « assioma » una proposizione che viene semplicemente scelta per iniziare una teoria e quindi non viene dimostrata, almeno nell'ambito di quella teoria; e ciò perché dimostrazione significherebbe riportare la validità della proposizione a quella di altre che la precedono e questo è impossibile per le prime proposizioni, almeno — ripetiamo — nell'ambito della teoria stessa. Ma il matematico, con il termine « assioma », non vuole per nulla indicare che le proposizioni sono state scelte per la loro « verità innegabile » oppure per la loro « evidenza incontrastabile ». Gli assiomi vengono scelti liberamente, con il solo limite che il sistema da essi formato sia esente da contraddizioni interne.

È pertanto vero che il matematico si sente del tutto libero nella scelta delle proposizioni iniziali di una teoria, ed è pronto a cambiare tali proposizioni iniziali nel caso in cui tale teoria sia destinata a descrivere un certo aspetto della realtà osservata e nel caso in cui le conseguenze dedotte rigorosamente dagli assiomi discordino dalla realtà in modo non accettabile, nell'ambito dei fini che si vogliono conseguire. Paradossalmente si potrebbe dire che per il matematico gli assiomi di una teoria sono le sole proposizioni sulle quali vale la pena di discutere, essendo poi le conseguenze (cioè i teoremi) rigorosamente e necessariamente dedotte dagli assiomi. L'analisi può vertere soltanto non sulla scelta (che è libera) ma su una eventuale contraddizione interna oppure sulla aderenza delle proposizioni scelte ad una realtà che si vuole descrivere e quindi conoscere attraverso questa descrizione.

Da questo punto di vista questa impostazione risulta fondamentale per ogni conoscenza della realtà che voglia essere scientifica; infatti pare innegabile che ogni teoria debba rendere sempre chiaramente conto delle premesse dalle quali intende partire e debba definire chiaramente i termini che essa usa. Sono queste le regole che già B. Pascal dettava, ma che vengono anche troppo spesso dimenticate nelle discussioni, soprattutto quelle che vengono svolte con l'impiego del linguaggio comune, discussioni nelle quali i termini variano pian piano insensibilmente di significato, oppure vengono presi in vari significati diversi tra loro e nelle quali spesso vengono introdotti surretiziamente dei principi considerati come « evidenti » che sono dei veri e propri assiomi non dati esplicitamente all'inizio e sui quali non si è discusso prima di iniziare la deduzione.

In questo ordine di idee si potrebbe sostenere che la matematica, non tanto forse nella materialità dei contenuti che vengono di volta in volta insegnati, ma nella sua struttura, nella sua mentalità e nel suo metodo, ha un compito formativo essenziale per la cultura. Almeno fino a che si intende la cultura come la manifestazione della libertà del pensiero e non dell'indottrinamento collettivo e del lavaggio del cervello.

5) Si potrebbe aggiungere che l'atteggiamento della matematica che abbiamo cercato di descrivere non è stato sempre esplicitamente adottato, ma è una delle conseguenze della crisi di revisione dei principi e dei metodi, crisi che è iniziata nel sec. XIX. È questa una prova del fatto che la matematica è una scienza vivente e che non risponde affatto a quel ritratto di dottrina imbalsamata e fossilizzata, dalle pretese assolute e dagli assiomi imperativi che qualcuno si è foggiato a propria comodità.

Si pensi, per esempio, al cambiamento del significato della geometria, avvenuto durante la crisi cui accennavamo. Come è noto, nella sua presentazione classica, che risale ad Euclide, la geometria ci si presenta come una dottrina che definisce verbalmente i propri oggetti, enuncia delle proposizioni senza dimostrarle perché sono « evidenti », e deduce rigorosamente le proposizioni meno « evidenti » con i mezzi della logica. A seguito della crisi di cui si diceva, oggi la geometria ha rinunciato ad una definizione formale esplicita degli enti di cui si occupa, ed ha rinunciato ad accettare gli assiomi di partenza come fondati sulla « evidenza » di una realtà fisica che dovrebbe essere il suo oggetto, per assumere l'assetto di un sistema ipotetico deduttivo, in cui le proposizioni sono scelte con una certa libertà, senza costrizioni esteriori se non quella di evitare le contraddizioni. Tali proposizioni sono suggerite dalle proprietà degli enti fisici fuori di noi, che tradizionalmente venivano considerate come oggetto della geometria, ma non imposte da una evidenza sperimentale come si pensava nella concezione classica.

Va osservato tuttavia che con questo atteggiamento non si rinuncia a fare della geometria una scienza che possa inquadrare e razionalizzare le nostre idee che riguardano la forma, l'estensione, la mutua posizione degli oggetti della nostra esperienza. Soltanto si è acquisita la coscienza del fatto che questa concezione conferisce alla geometria l'atteggiamento di un capitolo della fisica, senza quindi la pretesa di dire delle verità assolute, ma anche rendendosi ben conto del fatto che ogni schema astratto ha una sua rispondenza con la realtà, rispondenza che viene giudicata con riferimento alla adeguatezza dello schema nei riguardi di determinati fini teorici o pratici che ci si propone.

Sarebbe facile trarre da altre branche della scienza la conferma di ciò che abbiamo detto, cioè del fatto che la matematica si presenta oggi, nella sua struttura di sistema ipotetico deduttivo, come un quadro ideale del sapere scientifico. Vale la pena tuttavia di dire che altre osservazioni interessanti possono essere tratte dalla storia della matematica per mettere in luce il carattere di linguaggio che questa ha; ed insieme per presentare, come abbiamo già detto, quanta fantasia creatrice si manifesti nella creazione di un simbolismo adatto ad un determinato problema, e di un linguaggio efficace per la comunicazione e per la deduzione. Questo aspetto di autentica avventura intellettuale che assume la scoperta matematica, non viene spesso presentato nella esposizione scolastica di questa scienza la quale, dunque, si presenta con quel viso scostante e fossilizzato che le viene attribuito e che non è il suo.

Ricordiamo per esempio lo scritto di Archimede che è intitolato « L'arenario »: in esso Archimede scrive al tiranno Gelone di Siracusa, dicendo che certuni avevano affermato che il numero dei granelli di sabbia che esistono al mondo è infinito, ma che egli smentisce l'affermazione e si offre di contare il numero dei granelli di sabbia che riempiono lo spazio della sfera che ha centro nella Terra e ha come raggio quello della distanza tra Terra e Sole. Ovviamente in questo caso la soluzione comoda di dire che il numero dei granelli di sabbia è infinito era una confessione del fatto che non esistevano mezzi, nella convenzione greca per rappresentare i numeri interi, per rappresentare numeri molto grandi. Pertanto l'affermazione del fatto che i granelli di sabbia al mondo sono infiniti era chiaramente una confessione di impotenza. A questa situazione Archimede reagisce anzitutto costruendo una convenzione per rappresentare numeri interi molto grandi e poi facendo, in modo molto elementare, il calcolo del numero dei granelli di sabbia che riempiono la sfera del Sole.

Si potrebbe dire che in questo caso la vittoria della intelligenza sul problema è stata ottenuta proprio con la costruzione di un sistema di convenzioni linguistiche (nel caso in esame convenzioni per rappresentare i numeri grandi) che permettono la rappresentazione di un concetto e permettono anche la deduzione a partire da certi dati.

6) Ciò che abbiamo detto fin qui ha anche un risvolto abbastanza interessante per quanto riguarda la analisi della mentalità del matematico, il che può anche avere un riflesso sulla didattica e sulla motivazione degli studenti alla applicazione ed allo studio.

Spesso, infatti, soprattutto nella recente contestazione studentesca, si discute a proposito della struttura del corso di laurea in matematica e degli altri corsi di laurea che più o meno esplicitamente utilizzano lo strumento matematico.

La critica si appunta spesso sui contenuti dei corsi, che vengono variamente criticati nei riguardi della « utilità » oppure della « modernità » oppure della « coordinazione ».

Si potrebbe dire che queste critiche non tengono completamente conto del carattere della matematica attuale, la quale da un certo punto di vista si potrebbe dire caratterizzata più dai suoi procedimenti che dai suoi contenuti. Abbiamo cercato infatti di far vedere che la struttura della matematica è quella di un sapere che sostanzialmente utilizza dei linguaggi artificiali, e che adotta il metodo assiomatico.

Occorre dire tuttavia che questo modo di vedere può essere considerato come astratto, e che nella ricerca concreta, nella scoperta, così come nell'insegnamento a livello universitario, il carattere del ricercatore e dell'insegnante, si manifestano in pieno, soprattutto nell'utilizzare la intuizione e la immaginazione.

A questo proposito esistono delle analisi psicologiche ormai classiche; ricordiamo per es. la celebre conferenza che H. Poincaré fece al congresso internazionale dei matematici, tenutosi a Parigi nel 1900. Poincaré distingueva in modo abbastanza rudimentale due tipi di ricercatori matematici, che potrebbero essere classificati come « analisti » oppure come « geometri ». La caratteristica del procedimento di scoperta degli analisti è tipicamente quella della formalizzazione e della deduzione attraverso calcoli; la caratteristica fondamentale dei geometri dovrebbe essere quella della visualizzazione dei rapporti matematici e della ricerca e della scoperta che si fonda soprattutto sulla intuizione dei rapporti geometrici. Durante lo stesso congresso, D. Hilbert riconosceva esplicitamente che le figure utilizzate dal geometra sono una specie di simboli, analoghi ai simboli dell'algebra, con leggi di utilizzazione che non si esplicitano in regole formali, ma che il geometra utilizza costantemente, almeno fino a quando egli deduce in modo rigoroso.

È chiaro quindi che la vicenda della scoperta matematica e della costruzione di una teoria dipende dal carattere del ricercatore, dal patrimonio di conoscenze che egli ha, dall'insieme di proposizioni che egli dà per scontate e vere, o perché ne conosce la dimostrazione o perché egli le ritiene probabili in base alla propria esperienza.

Questa analisi è stata ripetuta ed approfondita da Hadamard in un'opera molto nota; in questa sono state enucleate molte delle circostanze che si verificano nel momento in cui avviene la scoperta matematica; il che del resto è avvenuto anche in una celebre pagina autobiografica di Poincaré.

Queste brevissime e rudimentali osservazioni potrebbero avere anche una conseguenza per quanto riguarda la risposta alle critiche di cui si diceva. Invero si potrebbe dire che sarebbe opportuno non parlare di « materie » nel corso di laurea in matematica, intendendo tali « materie » come qualificate dai contenuti esposti nei corsi; piuttosto occorrerebbe parlare di vari modi di fare la matematica, che si integrano e sono tra loro complementari.

Pertanto, in modo paradossale, le critiche elevate spesso a proposito di ripetizioni dei corsi o di sovrapposizioni di programmi sono da questo punto di vista non molto fondate. Per fare uno dei tanti esempi a cui si potrebbe pensare, si può osservare che esiste un capitolo di meccanica che viene svolto spesso nel corso di fisica e nel corso di meccanica razionale: ovviamente uno studente che abbia un minimo di intelligenza dovrebbe profittare di questa sovrapposizione, perché essa gli dà il modo di entrare in contatto con due maniere complementari di presentare un contenuto, il quale del resto nella sua materialità potrebbe essere facilmente appreso sui trattati. La cosa interessante è che il fisico sperimentale e il matematico affrontano lo stesso argomento con un diverso patrimonio di idee, di metodi, di intuizione; e quindi, ciascuno dei due getta una particolare luce sull'argomento, soprattutto dal punto di vista metodologico, che è quello che veramente interessa a livello universitario.

Le esemplificazioni potrebbero essere moltiplicate ma ci asteniamo dal farle per evitare eccessive lungaggini. Ci limitiamo quindi a concludere che non ci nascondiamo la difficoltà di insegnamento di una materia fondamentale come la matematica, che ha un suo essenziale valore formativo, soprattutto nel campo dell'astrazione e nel rigore; ma non rinunciamo a porci il problema di presentare la dimensione umanistica di questa scienza. Dimensione che potrebbe in qualche modo giustificare lo sforzo mentale necessario per apprenderla con pieno rigore e che porta a comprendere la sua evoluzione nell'interno della storia dell'uomo, come una delle componenti fondamentali del suo pensiero e della conoscenza scientifica.