L'ASSIOMATICA CLASSICA E MODERNA

Carlo Felice Manara

I. L'ASSIOMATICA GEOMETRICA CLASSICA

1. Si può dire che l'assiomatica sia nata con la geometria razionale, e precisamente con il primo trattato di questa scienza che la Storia ricordi: gli *Elementi* di Euclide; infatti in quest'opera mirabile il grande geometra greco imposta per primo il metodo che sarà adottato da tutta la matematica successiva; tale metodo consiste nell'enunciare esplicitamente, all'inizio dell'opera, le proposizioni che non vengono dimostrate, e nel dimostrare poi ogni altra proposizione che viene enunciata.
È noto che negli *Elementi* le proposizioni enunciate senza dimostrazione sono di due tipi; alcune vengono chiamate «Nozioni comuni», e hanno carattere di grande generalità. Ricordiamo qui, a titolo di esempio, le seguenti (Cfr. i *Materiali in inserto* a p. 49):
I - «Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche tra loro» ... e più sotto:
VIII - «Ed il tutto è maggiore della parte»[1].
Prima di queste proposizioni Euclide ne enuncia cinque, le quali riguardano delle nozioni di carattere più specificamente geometrico, o delle costruzioni o delle operazioni da eseguirsi sugli oggetti della geometria. È noto che queste proposizioni, enunciate — come si è detto — senza dimostrazione, vengono da Euclide chiamate «Postulati»; è anche noto che alcuni storici hanno interpretato questo nome come il sintomo di una volontà dell'autore di conferire alle frasi un carattere diverso dalle precedenti; come se l'autore fosse conscio del fatto che queste proposizioni hanno degli oggetti meno generali di quelle enunciate in precedenza; e come se questo carattere di minore generalità limitasse in qualche modo la certezza che le proposizioni stesse portano con sé. Ricordiamo che una tra queste riguarda il parallelismo tra rette, e viene chiamata abitualmente «Postulato della parallela», o anche «Postulato di Euclide», quasi per antonomasia; esso infatti ha dato luogo ad una secolare catena di tentativi di dimostrazione, e pertanto è stato in qualche modo assunto a caratterizzare tutta l'opera del grande geometra greco; alcuni autori poi parlano semplicemente del «Quinto postulato», limitandosi ad indicare l'ordine nel quale tale proposizione è enunciata nel trattato euclideo tra i postulati.

[1] Cfr. *Gli Elementi di Euclide*, a cura di A. Frajese e L. Maccioni, UTET, Torino 1970.

2. Abbiamo detto che l'impostazione data da Euclide alla sua esposizione della geometria è rimasta nei secoli come un modello di tutta la trattatistica successiva, quando abbia raggiunto un soddisfacente grado di rigore. In questo ordine di idee infatti noi crediamo che questo stile di esposizione sia testimonianza di una ricerca di chiarezza e di certezza che è tipica non soltanto della geometria, ma di tutto il pensiero matematico.
Nel caso in esame questa chiarezza e questa certezza vengono cercate mettendo in evidenza i principi sui quali si basa la teoria che viene in seguito esposta e sviluppata. La mentalità tipica, che ha ispirato la matematica greca, e che ispirerà la scienza successiva fino al secolo XIX, è la ricerca di proposizioni iniziali che potessero essere accettate da tutti in forza della loro evidenza, cioè a causa del fatto che tali proposizioni enunciavano delle proprietà vere di enti esistenti: gli oggetti appunto della geometria. Soltanto la crisi del secolo XIX costrinse gli studiosi a considerare i postulati da un altro punto di vista. Tale crisi è stata maturata da secoli di tentativi per giungere a dimostrare il postulato della parallela, ed è stata scatenata dalla creazione delle geometrie non-euclidee, e dalla constatazione del fatto che queste geometrie sono coerenti, e prive di contraddizioni interne.
Questa constatazione ha condotto i geometri a considerare i postulati non come fondati sulla evidenza dei contenuti, cioè sulla aderenza degli enunciati ad una realtà materiale idealizzata in qualche modo, ma tenendo presenti soltanto le necessità della fondazione rigorosa della dottrina che si sta costruendo.
La dimostrazione della compatibilità logica, della coerenza dei sistemi di geometria che negavano il postulato euclideo della parallela costrinse i matematici a ripensare un concetto che era stato ritenuto chiaro fino a quell'epoca; si tratta del concetto che viene abitualmente indicato con la espressione «spazio geometrico» o con altre equivalenti: infatti si potrebbe pensare che, nella mentalità classica, i postulati fossero destinati ad esprimere delle proprietà di questo ente, proprietà ritenute talmente evidenti da poter essere accettate senza dimostrazione alcuna, per il solo controllo della osservazione sperimentale. Questo modo di vedere le cose era stato in qualche modo messo in dubbio dai tentativi secolari (dei quali si è detto) di dimostrare il quinto postulato; ma sussistevano pochi dubbi sulla esistenza dello spazio (beninteso considerato come oggetto della geometria).
La dimostrazione della coerenza delle geometrie non-euclidee suscitò delle gravi difficoltà a queste concezioni: infatti se esistesse un ente, immaginato come dotato di certe determinate proprietà, sarebbe impossibile che esso fosse descritto e conosciuto da teorie contraddittorie, come sono la geometria classica euclidea e le geometrie non-euclidee; infatti nella concezione abituale siamo portati ad escludere che un ente abbia proprietà contraddittorie, perché ciò implicherebbe la impossibilità di costruire una qualunque teoria coerente su di esso. Si dovette quindi abbandonare la concezione classica della geometria, considerata come una scienza qualificata e definita dai suoi oggetti e dai suoi contenuti, per adottare una concezione che permettesse di superare le difficoltà logiche generate dalle dimostrazioni acquisite.
Questo abbandono portò come conseguenza anche la necessità di guardare in altro modo ai postulati. Questi non poterono più essere considerati come delle proposizioni la cui validità è fondata sulla evidenza, e sulla aderenza ad una realtà esteriore a noi, che viene descritta in base all'osservazione elementare, ma furono considerati come delle proposizioni scelte con una certa libertà, che forniscono la definizione implicita (o definizione d'uso) dei concetti della geometria.
Per avere un'idea del cambiamento di prospettive che così veniva instaurato basta confrontare, per esempio, le frasi con le quali iniziano due trattati ormai classici: gli *Elementi* di Euclide ed i *Grundlagen der Geometrie* (Fondamenti di geometria) di David Hilbert.
La prima frase degli *Elementi* è ben nota, e recita:
«Il punto è ciò che non ha parte».
Essa ha fatto scorrere fiumi d'inchiostro, come suol dirsi; molti commentatori hanno voluto vedere in questa frase la definizione del punto, inteso come elemento fondamentale e primario della geometria; ed ancora oggi qualcuno adotta questa interpretazione della frase, ignorando evidentemente le difficoltà che ne conseguono.
La prima frase dell'opera di Hilbert suona invece (Cfr. i *Materiali in inserto* a p. 52):
«Pensiamo a tre insiemi di oggetti: gli oggetti del primo insieme saranno chiamati "punti", ... quelli del secondo insieme saranno chiamati "rette", ... quelli del terzo insieme saranno chiamati "piani"».

Non vi è quindi più la velleità di definire, o almeno di descrivere ciò di cui si parla: infatti la definizione rigorosa degli oggetti sarà data implicitamente dal sistema di assiomi che verranno formulati subito dopo. Pertanto è stata qui adottata in modo esplicito e metodico la tecnica della definizione implicita (o definizione per postulati, o anche definizione d'uso, secondo alcuni Autori) degli enti di cui si parla.
Come è noto, quando si adotti questo atteggiamento si debbono di conseguenza risolvere vari problemi, di fondamentale importanza logica ed epistemologica. Se infatti si abbandona la pretesa che i postulati enuncino delle proprietà di certi enti la cui esistenza è accettata o accertata in qualche modo, si presenta il problema fondamentale di garantire che il sistema delle proposizioni enunciate non contenga alcuna contraddizione che è attualmente nascosta, ma che potrebbe diventare palese a seguito delle conseguenze che si traggono dalle proposizioni enunciate; occorre quindi garantire che tale sistema sia, come suol dirsi, compatibile o coerente. Invero se sussistesse il riferimento ad una realtà esteriore questa potrebbe essere assunta come garante della coerenza del sistema di proposizioni che la descrivono; ma la mancanza di questo riferimento costringe il ricercatore a colmare in altro modo la lacuna, ed a garantire la compatibilità del sistema di proposizioni iniziali che si enunciano.

3. La costruzione di un sistema di postulati presenta anche un secondo problema logico fondamentale, oltre a quello della compatibilità del sistema di proposizioni enunciate; si suole enunciare tale problema dicendo che occorre assicurare la indipendenza del sistema di proposizioni. In altre parole, occorre garantire che nessuna delle proposizioni che si enunciano possa essere dimostrata sulla base delle altre. In particolare si può cercare di garantire che nessuna delle proposizioni possa essere dimostrata sulla base di quelle che sono enunciate prima di lei, oppure si può cercare di garantire che nessuna proposizione possa essere dimostrata sulla base di tutte le altre (cioè di quelle che la precedono e di quelle che la seguono). Nel primo caso si suol dire che le proposizioni del sistema sono «ordinatamente indipendenti»; nel secondo caso si suol dire che le proposizioni del sistema sono «assolutamente indipendenti».

4. I due problemi logici che abbiamo presentato poco sopra non hanno la medesima importanza: invero si potrebbe dire che il primo, cioè quello della coerenza, è il più importante; infatti se il sistema di postulati che si enuncia contiene una contraddizione nascosta, tutta la teoria che si costruisce sarebbe priva di consistenza. Nel secondo caso, cioè in relazione al problema della indipendenza dei postulati, l'accertamento di questa qualità del sistema di proposizioni enunciate è meno importante, perchè la sua mancanza non inficia la validità complessiva della teoria che si vuole costruire; e d'altronde la soluzione di questo problema si può ricondurre a quella del primo: infatti per dimostrare che un dato postulato è indipendente dagli altri del sistema che si presenta è sufficiente dimostrare che è compatibile il sistema costituito dalla negazione del postulato considerato e dalla affermazione di tutti gli altri.
La procedura che viene abitualmente seguita per accertare la coerenza di un sistema di postulati è quella che porta ad esibire un insieme di enti, scelti fuori dalla teoria che si vuole costruire, che verifichino i postulati enunciati; più precisamente, agli enti considerati vengono attribuiti come nomi i termini che entrano nelle proposizioni, ed in questo caso i postulati traducono le relazioni, che si suppongono note, tra gli enti considerati. Si tratta quindi del ricorso ad una realtà esteriore, ricorso che, almeno in questo ordine di idee, appare inevitabile.
Così, nel caso dell'opera di Hilbert che abbiamo citato, i termini che entrano nelle proposizioni (punto, retta, piano ecc.) vengono interpretati come nomi di certi enti tratti dall'algebra, o dall'analisi matematica; di conseguenza i postulati riproducono delle proprietà di questi enti: così per esempio il termine «punto» viene interpretato come nome di una terna ordinata di numeri, il termine «piano» viene interpretato come nome di una equazione lineare in tre incognite, e così via. I postulati che vengono enunciati traducono, in questo caso, delle proprietà fondate sull'algebra lineare in un campo numerico.
Ovviamente la validità di questa procedura presuppone che sia già stata accertata la coerenza dell'algebra e dell'analisi matematica. Tuttavia questa procedura non instaura un circolo vizioso, perchè la coerenza di queste due dottrine può essere garantita senza ricorrere a delle nozioni di geometria; e comunque è lecito pensare che, nel peggiore dei casi, la geometria reggerà logicamente almeno fino a quando reggeranno l'algebra e l'analisi matematica.

II. LA RELAZIONE DI UGUAGLIANZA TRA FIGURE

1. La relazione di uguaglianza tra figure geometriche può essere analizzata con gli strumenti della logica ed inquadrata nella mentalità e nella metodologia della impostazione assiomatica, della quale abbiamo trattato nel cap. 1.
Si può osservare che la relazione di uguaglianza ha una importanza fondamentale nella geometria classica; basti ricordare che essa viene introdotta da Euclide con la proposizione 4 del primo libro degli *Elementi*[2]. Nella manualistica abituale il contenuto delle proposizioni ricordate viene presentato parlando di «criteri di uguaglianza dei triangoli».
In particolare quello che viene indicato di solito come il «primo criterio di uguaglianza dei triangoli» afferma che due triangoli, i cui vertici sono indicati con i simboli: A, B, C ed A′, B′, C′ sono uguali se sono valide le relazioni seguenti: lato AB = lato A′B′, lato AC = lato A′C′ ed infine se l'angolo avente vertice in A è uguale a quello che ha vertice in A′. È noto che nel trattato euclideo questo criterio di uguaglianza di due triangoli viene presentato con riferimento al trasporto rigido di uno dei triangoli fino a farlo sovrapporre all'altro.
Questa impostazione è stata abitualmente accettata sulla base delle nostre esperienze che riguardano le manipolazioni quotidiane sui corpi rigidi; ed anche il concetto di «corpo rigido» viene da noi costruito partendo dalle esperienze di manipolazione di oggetti materiali che non cambiano visibilmente di forma per opera degli sforzi che noi possiamo produrre con le nostre forze muscolari.
Tuttavia la critica dei secoli più vicini a noi non si è potuta accontentare dell'appello alla esperienza o ad una pretesa intuizione geometrica che su di essa si fonda; in particolare è stato avvertito il pericolo di circolo vizioso, che nasce ricorrendo alla uguaglianza tra figure per la definizione di trasporto rigido, e al concetto di trasporto rigido per la definizione della uguaglianza tra figure. Tale pericolo era già stato segnalato da Arthur Schopenauer [*Die Welt als Wille und Vorstellung* — Il mondo come volontà e rappresentazione], il quale aveva criticato il ricorso che Euclide fa al trasporto rigido, proprio in uno dei punti fondamentali della sua costruzione teorica[3].

[2] Facciamo riferimento al volume: *Gli Elementi di Euclide*, a cura di ATTILIO FRAJESE e LAMBERTO MACCIONI, UTET, Torino 1970.

[3] La questione è discussa estesamente nel volume citato di Frajese e Maccioni, ed anche nella classica opera di THOMAS L. HEATH, *The thirteen books of Euclid's Elements*, New York 1956.

2. La situazione che abbiamo analizzato poco sopra potrebbe essere descritta parlando di «crisi della nozione di uguaglianza»; e vorremmo osservare che in questo contesto il termine «crisi» non vuole avere il significato abituale, che fa riferimento anche a situazioni di fine, caduta, fallimento; ma invece vuole avere il significato (suggerito anche dalla etimologia greca) di analisi, giudizio, ricerca di fondamento.
Questa analisi è stata favorita e quasi urgentemente richiesta dalla invenzione (avvenuta nel secolo scorso) di nuovi rami della geometria, in particolare dalla nascita della geometria proiettiva; nascita che si deve al lavoro di due geniali matematici, che hanno lavorato con mentalità profondamente diverse, raggiungendo tuttavia il risultato storico di dotare la geometria di un nuovo fondamentale capitolo: intendiamo alludere a K. K. von Staudt ed a V. Poncelet.
L'importanza della nascita della geometria proiettiva non risiede soltanto nel fatto che essa ha dotato, come abbiamo detto, la matematica di un nuovo, importante ed imponente capitolo; a nostro parere infatti l'importanza risiede anche nel fatto che essa ha dato occasione ed ha fornito lo stimolo per un lavoro di sintesi dei contenuti delle ricerche geometriche; tale lavoro di sintesi ha trovato la sua espressione nella celebre dissertazione inaugurale di F. Klein, che oggi viene abitualmente ricordata con la espressione «Programma di Erlangen» (Cfr. i *Materiali in inserto* a p. 59).
In quest'opera Felix Klein risolve il problema della classificazione delle varie geometrie esistenti al suo tempo utilizzando il concetto di gruppo di trasformazioni. L'osservazione fondamentale da cui si può partire per comprendere le idee di Klein potrebbe essere esposta dicendo che già nella geometria classica lo spostamento di una figura con un movimento rigido era considerato non influente rispetto alle proprietà delle quali si interessava il matematico; con altro linguaggio si potrebbe dire che la geometria classica studiava le proprietà delle figure che non variavano con movimenti rigidi. Ora si osserva che si possono comporre questi movimenti in modo naturale, e che l'insieme dei movimenti così composti, e con le proprietà che ne derivano, costituisce un gruppo. Pertanto si giunge ad osservare che l'oggetto di studio della geometria classica è l'insieme delle proprietà delle figure geometriche che rimangono invarianti rispetto al gruppo di trasformazioni costituito dai movimenti rigidi dello spazio.
La nascita della geometria proiettiva portò l'attenzione dei geometri sulle trasformazioni proiettive delle figure; queste costituiscono un gruppo più esteso del gruppo di trasformazioni, ammesso dalla geometria elementare; infatti quest'ultimo può essere visto come un sottogruppo del gruppo proiettivo, ed è caratterizzato dal fatto di lasciare invariata una certa figura che viene anche definita l'«assoluto» dello spazio.
Pertanto, sotto lo stimolo della problematica generata dalla geometria proiettiva, iniziava la revisione critica del concetto di uguaglianza tra figure geometriche. In forma rudimentale e sommaria si potrebbe dire che nella concezione classica l'uguaglianza di due figure era considerata come una relazione nota, ed il trasporto rigido era visto come un mezzo per verificare il sussistere della relazione stessa. Ma l'invenzione della geometria proiettiva indusse a considerare come uguali tra loro due figure che fossero trasportabili l'una sull'altra con una trasformazione proiettiva, e non soltanto con un movimento rigido o, al massimo, con una similitudine. Si potrebbe esporre l'insieme di questi concetti in forma poco precisa, ma suggestiva, dicendo che occorre scegliere tra due modi di vedere le cose: o due figure si sovrappongono con una trasformazione di un determinato gruppo perché sono uguali; oppure esse sono uguali perché sono sovrapponibili l'una sull'altra con una trasformazione. Nel primo caso la relazione di uguaglianza è considerata nota prima della trasformazione; nel secondo caso il gruppo di trasformazioni è costitutivo della relazione di uguaglianza tra figure.
Come abbiamo già detto, la prima posizione è quella classica; pertanto l'evoluzione critica di cui abbiamo detto ne costituisce, per così dire, un ribaltamento radicale.
In ogni caso le esigenze della critica odierna richiedono che anzitutto venga esplicitamente detto quale sia la strada che viene scelta, ed in secondo luogo richiedono che non venga lasciato nulla ad una pretesa intuizione geometrica, ma che l'insieme dei concetti scelti come primitivi venga precisato attraverso un insieme di postulati (o assiomi che dir si voglia) esplicitamente presentati come tali; queste proposizioni sono naturalmente enunciate senza dimostrazione, ma occorre ovviamente che sia accertata la loro compatibilità ed anche la loro indipendenza.

3. Una fra le trattazioni moderne che imposta rigorosamente il problema dei fondamenti della geometria, rimanendo tuttavia nella mentalità classica, è quella data da David Hilbert, nella sua opera intitolata «Fondamenti di geometria», che abbiamo già citato sopra; in essa il grande matematico tedesco sceglie il concetto di uguaglianza come concetto primitivo, ed enuncia un insieme di proposizioni (assiomi) che ne danno la definizione implicita. In tal modo egli giunge a superare le critiche (che abbiamo ricordato) avanzate contro la posizione euclidea, sulla base della osservazione che una nozione così importante, ed anzi addirittura fondamentale come quella di uguaglianza fosse stata introdotta con il riferimento ad una operazione fisica concreta, come il trasporto rigido.
Tuttavia già nel secolo XIX H. von Helmholtz preconizzò la strutturazione di un insieme di proposizioni fondamentali della geometria che facesse esplicito riferimento ai gruppi di trasformazioni. Pensiamo che non sia senza significato il fatto che questa idea sia stata lanciata da un cultore di fisica, divenuto famoso per le sue opere in questa branca della scienza. Crediamo infatti che le idee del fisico tedesco siano state il germe per una visione abbastanza nuova ed originale della geometria: precisamente crediamo che questa impostazione (originata, come abbiamo detto, dalle idee di Helmholtz) abbia attirato l'attenzione dei cultori di geometria dagli oggetti ai nostri comportamenti nei riguardi di essi. Invero nella visione classica la geometria era considerata (come si è detto) come determinata dai suoi contenuti, dai suoi oggetti; questi venivano identificati nelle figure, le quali, a loro volta, possono essere guardate come originate dalle nostre esperienze sul mondo materiale, elaborate dalla fantasia. Anche la trattazione di Hilbert, come abbiamo detto, non si scosta da questa concezione, pur introducendo in essa il rigore del metodo assiomatico. Invece la concezione originata dalle idee di Helmholtz sposta l'attenzione dagli oggetti alle trasformazioni di questi; pensiamo che a questo punto sia facile il passo che porta dagli oggetti ai nostri comportamenti nei loro riguardi; cioè conduce dalla geometria, intesa in senso classico come studio di oggetti immutabili ed ideali, alla geometria intesa come primo capitolo della fisica, cioè come dottrina che razionalizza le nostre esperienze nei riguardi dei primi e fondamentali aspetti del mondo reale.
Di conseguenza alcune figure geometriche, che erano considerate come luoghi geometrici, cioè come insiemi di oggetti elementari (punti) caratterizzati da certe proprietà vengono invece presentate in modo, per così dire, dinamico, come traiettorie (oppure orbite che dir si voglia) descritte da un punto o da certi punti, trasformati dalle operazioni di un gruppo. Così per esempio la retta, che nella visione classica è vista come un insieme privilegiato di punti dello spazio, in questa impostazione viene vista come la traiettoria di un punto al quale sono state applicate tutte le traslazioni generate dalle potenze (ad esponente reale qualunque) di una traslazione data.
Questo aspetto, relativamente nuovo, secondo il quale si può oggi presentare la geometria, sarà più diffusamente preso in considerazione nel seguito. Ci limitiamo qui a ricordare che i matematici della scuola di G. Peano, ed in particolare Mario Pieri, dedicarono vari e fondamentali lavori ai fondamenti della geometria. Tra gli altri il Pieri trattò dif-

fusamente della fondazione della geometria su questi criteri nel suo lavoro sulla geometria elementare fondata sul concetto di punto e movimento.
Questo modo di vedere la geometria ha visto una recente importante fioritura per opera del Bachmann[4] e di altri geometri che si dedicano a ricerche ispirate a queste idee.
Pare a noi di poter dire che in queste impostazioni i concetti della geometria vengono strettamente collegati con certe strutture algebriche di grande importanza, ampliando così le visioni di F. Klein e di H. von Helmholtz; e queste strutture forniscono gli strumenti per la descrizione degli oggetti geometrici e per la deduzione delle loro proprietà.

[4] FRIEDRICH BACHMANN, *Aufbau der Geometrie aus Spiegelungsbegriff*, Berlin 1973.

Occorre tuttavia osservare anche che questo atteggiamento non è stato adottato da coloro i quali hanno proseguito sulla strada da lui imboccata: infatti Ugo Cassina e Mario Pieri enunciano dei postulati del tipo:
«Esistono dei punti»
il che vorrebbe significare, come spiega per esempio U. Cassina, che
«La classe "punto" non è vuota».
Non è nelle nostre intenzioni criticare in questa sede le opere di questi matematici; dei quali intendiamo invece apprezzare lo spirito per così dire pionieristico, con il quale hanno affrontato il problema dei fondamenti della geometria, in un'epoca nella quale questo problema, almeno negli ambienti scientifici italiani, non era considerato interessante.
Tuttavia vorremmo osservare che, nello spirito rigoroso della impostazione assiomatica, la definizione degli oggetti di cui si parla è fornita implicitamente dall'insieme dei postulati: se questi non sono compatibili, nel loro insieme, gli oggetti di cui si parla non possono esistere, e pertanto l'affermazione della loro esistenza viene ad avere poco senso.
Tuttavia si potrebbe anche pensare che l'enunciato di Peano, che afferma che si può «segnare» un punto, possa essere interpretato come un avvio alla procedura per accertare la compatibilità del sistema di postulati che si enunciano. Procedura che, in qualche misura, può anche fare appello alle esperienze concrete, dalle quali, in ultima analisi, prende la sua origine la geometria; questa scienza infatti si distingue da un puro gioco, o da una esercitazione intellettuale puramente astratta per il suo riferimento (più o meno immediato) alla realtà fisica.
Non ci pare che sia questo il luogo per proseguire ulteriormente in questa direzione; ci limitiamo ad osservare che le questioni qui affrontate superano ed estendono la problematica relativa all'uguaglianza tra figure, dalla quale queste nostre considerazioni hanno preso l'avvio.

3. A conclusione dei brevi cenni sulla evoluzione del concetto di scienza geometrica e dell'assiomatica relativa si potrebbe osservare che lo spostamento dell'attenzione dei matematici, dagli enti alle operazioni, e quindi dalle proprietà delle «cose» alle leggi che reggono i nostri comportamenti nei riguardi delle cose stesse non significa per nulla che la matematica possa essere considerata come il campo dei comportamenti arbitrari o delle invenzioni di pura fantasia, senza legami con la realtà.
Invero in questa nuova luce l'assiomatica non cessa di essere legata dalla necessità fondamentale di garantire la propria coerenza, ovvero l'assenza di contraddizioni, palesi o nascoste. Perché la presenza di contraddizione nell'insieme di proposizioni iniziali porterebbe come conseguenza alla inconsistenza di tutta

III. L'ASSIOMATICA DELLE TRASFORMAZIONI

1. Ciò che abbiamo scritto poco sopra, a proposito della impostazione dei fondamenti della geometria nello spirito di Helmholtz, ci pare consono all'evoluzione dello spirito e dei metodi anche di altre branche della matematica. A titolo di semplice esempio ci pare che si possa citare l'evoluzione storica recente del concetto di algebra: infatti nel momento della creazione di questa scienza essa appariva come un insieme di nuovi metodi per conoscere e trattare i vecchi contenuti; in certo senso le regole dell'algebra erano dettate dalle proprietà, supposte note, dei numeri che si conoscevano all'epoca. L'adozione metodica di operazioni prima non impiegate costrinse via via i matematici ad ampliare i campi di applicazione, costruendo nuovi insiemi numerici; nacquero così i numeri relativi, e poi il campo complesso; ma si potrebbe dire che in ogni caso le proprietà dei contenuti ispiravano e in certo modo giustificavano l'introduzione di nuovi metodi e di nuove operazioni.
Si deve a L. Euler l'analisi della composizione dei movimenti polari (cioè dei movimenti rigidi che lasciano fisso un punto dello spazio), e l'osservazione che la composizione di due operazioni cosiffatte non è commutativa. La costruzione e lo studio metodico di strutture non commutative, come quella di gruppo, e la loro applicazione a problemi geometrici (soprattutto per opera di Klein) fu il germe della evoluzione che spostò gradualmente l'attenzione dei matematici sulla struttura delle operazioni piuttosto che sugli oggetti che si studiano. Di modo che l'attenzione dei ricercatori è oggi prevalentemente concentrata in primo luogo sulle operazioni e sulle strutture algebriche astratte. I numeri ed i campi numerici vengono visti piuttosto come alcuni contenuti che possono, per così dire, dar corpo alle strutture astratte.

2. L'evoluzione cui abbiamo accennato è avvenuta anche nel campo della geometria, come abbiamo già detto, e come cercheremo di spiegare ulteriormente. Osserviamo tuttavia che anche nella impostazione classica della geometria si possono trovare delle tracce di un modo di pensare che pare diverso da quello della considerazione abituale. Per esempio si può osservare che nella trattatistica abituale, quando si vuole indurre il lettore a formarsi un'immagine del punto geometrico (nel senso abituale e tradizionale del termine), si suole invitare il lettore ad immaginare dei corpiccioli sempre più piccoli, come macchioline d'inchiostro o granelli di sabbia, e si suole invitare poi a spingere al limite l'immaginazione della piccolezza. Tuttavia vale la pena di ricordare che Euclide usa il termine greco «semeion» (cioè segno) per indicare il punto; questo termine potrebbe essere interpretato come un invito al lettore ad eseguire una operazione che consiste nel segnare un posto; e questo posto è ovviamente determinato in modo univoco, in modo che non abbia senso parlare di «parti» del posto indivisibile segnato. Pertanto in questo modo di vedere le cose riuscirebbe inutile l'operazione della immaginazione, la quale deve respingere la possibilità di distinguere delle parti, sempre esistenti in un corpicciolo materiale, per quanto piccolo esso sia. Un atteggiamento aderente a questo spirito è stato assunto da G. Peano, il quale, in uno dei suoi lavori dedicati all'assiomatica della geometria elementare, enuncia il seguente postulato:
«Si può segnare un punto».
Pare quindi che si possa dire che in questo modo il matematico piemontese abbia inteso riferirsi ad una operazione che l'osservatore può eseguire sul mondo circostante, e quindi abbia, almeno in questo, adottato il punto di vista che stiamo per esporre, cioè l'atteggiamento che sposta l'accento dalle cose e dai contenuti che si studiano sulle azioni e sui comportamenti del soggetto che costruisce una teoria per organizzare e razionalizzare le proprie esperienze sull'ambiente in cui vive ed opera.

la costruzione teorica che si cerca di impostare. La differenza tra questa concezione relativamente nuova e quella classica potrebbe dunque consistere nel fatto che la richiesta di coerenza nella concezione classica era diretta verso le proposizioni che enunciavano certe proprietà degli oggetti che si studiano; nella concezione più moderna la richiesta di coerenza è invece prevalentemente diretta verso l'insieme dei nostri comportamenti nei riguardi di eventuali oggetti. E d'altra parte la garanzia della coerenza interna di un sistema di postulati può essere data con riferimento ad una realtà esterna al sistema stesso, realtà la cui coerenza è stata accertata.
Quindi la geometria, per quanto astratte e generali siano le sue teorie, non potrà mai essere considerata come il regno della pura fantasia scatenata, e potenzialmente anche incoerente; la geometria rimane quel dominio della coerenza e della chiarezza che l'hanno sempre caratterizzata durante i secoli.

Carlo Felice Manara
Università di Milano

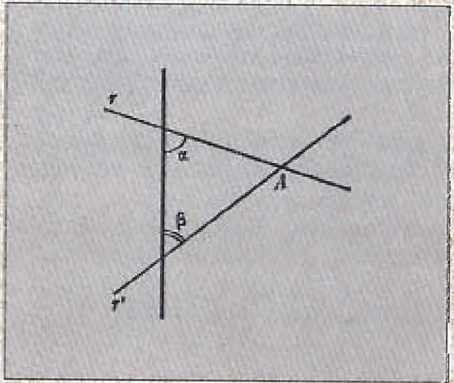
L'ASSIOMATICA DELLA GEOMETRIA ELEMENTARE E DELLE SUE TRASFORMAZIONI

Definizioni

[di EUCLIDE]

(Termini, ὅροι).
I. Punto è ciò che non ha parti.
II. Linea è lunghezza senza larghezza.
III. Estremi di una linea sono punti.
IV. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa (cioè, ai suoi punti).
V. Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.
VI. Estremi di una superficie sono linee.
VII. Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su essa (cioè, alle sue rette).
VIII. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciano in linea retta.
IX. Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'angolo si chiama rettilineo.
X. Quando una retta innalzata su una [altra] retta forma gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella su cui è innalzata.
XI. Angolo ottuso è quello maggiore di un retto.
XII. Angolo acuto è quello minore di un retto.
XIII. Termine è ciò che è estremo di qualche cosa.
XIV. Figura è ciò che è compreso da uno o più termini.
XV. Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla [stessa] linea [, cioè sulla circonferenza del cerchio,] a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro.
XVI. Quel punto si chiama centro del cerchio.
XVII. Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta tagli anche il cerchio per metà.
XVIII. Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. E centro del semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.
XIX. Figure rettilinee sono quelle comprese da rette, vale a dire: figure trilatere quelle comprese da tre rette, quadrilatere quelle comprese da quattro, e multilatere quelle comprese da più di quattro rette.
XX. Delle figure trilatere, è triangolo equilatero quello che ha i tre lati uguali, isoscele quello che ha soltanto due lati uguali, e scaleno quello che ha i tre lati disuguali.
XXI. Infine, delle figure trilatere, è triangolo rettangolo quello che ha un angolo retto, ottusangolo quello che ha un angolo ottuso, ed acutangolo quello che ha i tre angoli acuti.
XXII. Delle figure quadrilatere, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatere oltre a queste si chiamino trapezi.
XXIII. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.

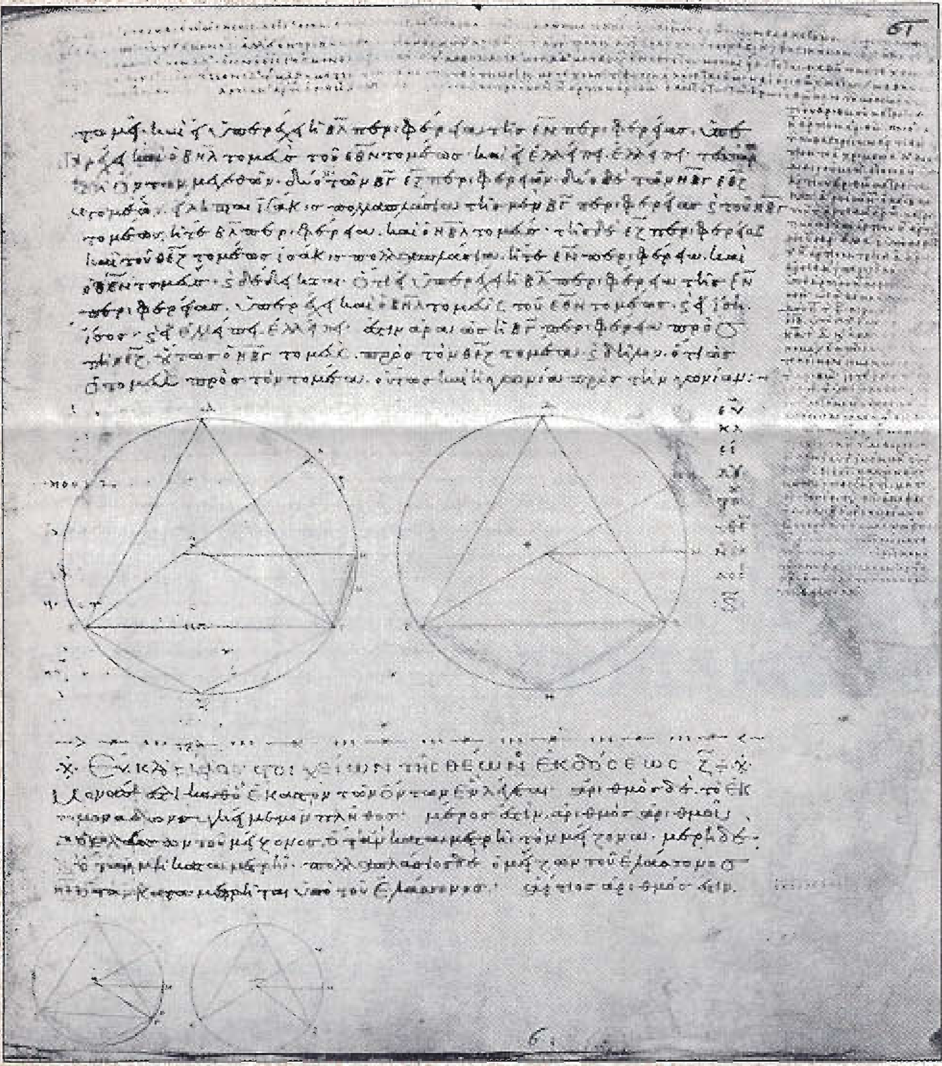
Postulati (αἰτήματα).
I. Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.
II. E che una retta terminata (= finita) si possa prolungare continuamente in linea retta.
III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza (= raggio).
IV. E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro.
V. E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (= tali che la loro somma sia minore di due retti), le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (= la cui somma è minore di due retti).



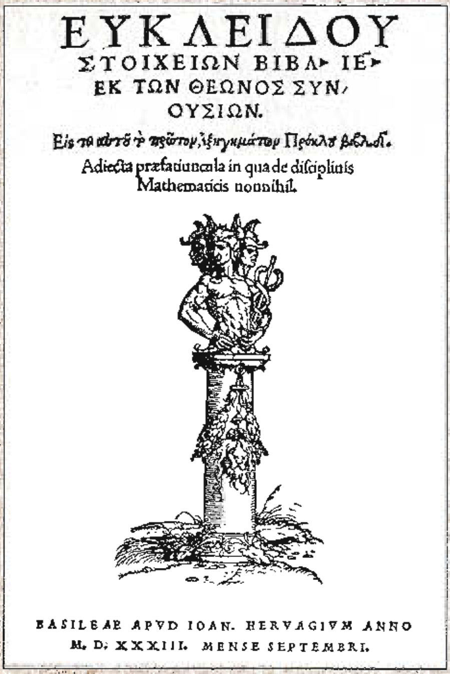
Sui Fondamenti della Geometria

[di Giuseppe Peano]
(Rivista di matematica, vol. IV, 1894, pp. 51-90)

Numerosi trattati di Geometria veggono la luce ogni anno in Italia e all'estero; spesso ne arrivano alla redazione della Rivista, con domanda di una recensione.
Ora questi nuovi trattati non sono, in generale, perfezionamenti di quelli già pubblicati; ma vi si ripetono, sotto varie forme, le cose contenute in altri, e non si tien conto di quelle osservazioni e studii speciali fatti sui fondamenti della Geometria, i quali studii, benché fatti con scopo puramente scientifico, pur tuttavia fin d'ora permettono, in certa misura, di semplificare, rendendoli più rigorosi, i principii della Geometria.
In questa nota mi propongo appunto di trattare sommariamente quei punti in cui si può effettivamente raggiungere il doppio scopo del rigore e della semplicità; e di far notare agli insegnanti ed agli studiosi che, anche nella matematica più elementare ci sia ancor vasto campo di ricerche per loro natura interessanti, e che possono essere immediatamente utili, perfezionando i metodi di insegnamento. Questi studii non esigono vaste cognizioni, ma logica rigorosa.
È ben noto che, in Geometria, non tutto si può definire; ciò è esplicitamente detto da più autori.
Però varia assai presso i diversi autori il numero e la natura degli enti geometrici non definiti.
Affinché risulti ben chiaro quali enti si definiscono in un trattato qualunque, e quali no, si osservi che i termini, che trovansi in esso, appartengono in parte alla Grammatica generale, o Logica; sono tali i termini *è*, *sono*, *e*, *o*, *non* ...
Chi si propone la loro classificazione ricostruisce la logica matematica.
Considereremo come termini geometrici tutti i termini che compaiono in un libro di geometria, e che non appartengono alla logica generale.
E il primo lavoro a farsi si è la distinzione di questi termini, o delle idee che essi rappresentano, in idee *primitive*, che non si definiscono, e in idee *derivate*, che si definiscono.
Dire che l'oggetto, o nome *x*, si può definire, significa che, combinando convenientemente i termini esprimenti le idee primitive coi termini di logica, si può formare un'espressione identica a quella indicata col nome *x*.
Se in una definizione oltre al termine che si vuol definire, comparisce qualche termine che non è stato definito, né classificato fra le idee primitive, si deve conchiudere che la classificazione non fu bene eseguita.
È chiaro che le idee primitive si debbano ridurre al minimo numero; e che per idee primitive si debbano assumere idee



Una pagina degli *Elementi* di Euclide. Firenze, Biblioteca Laurenziana.



ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛ. ΙΕ.
ΕΚ ΤΩΝ ΘΕΩΝΟΣ ΣΥΝΟΥΣΙΩΝ.
Εἰς τοῦ αὐτοῦ τὸ πρῶτον, ἐξηγημάτων Πρόκλου βιβλ. δ.
Adiecta præfatiuncula in qua de disciplinis Mathematicis nonnihil.
BASILEAE APVD IOAN. HERVAGIVM ANNO M. D. XXXIII. MENSE SEPTEMBRI.

Frontespizio della prima edizione degli *Elementi* di Euclide.

Nozioni comuni (κοιναὶ ἔννοιαι).
I. Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro.
II. E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.
II. E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.
VII. E cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.
VIII. Ed il tutto è maggiore della parte.
[IV. E se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le totalità sono disuguali].
[V. E doppi di una stessa cosa sono uguali fra loro].
[VI. E metà di una stessa cosa sono uguali fra loro].

[tratto da Euclide, *Gli Elementi*, edizione a cura di A. Frajese e L. Maccioni, UTET, 1970].

semplicissime, e comuni a tutti gli uomini; esse debbono avere il loro nome in tutte le lingue. Chi incomincia lo studio della Geometria deve già possedere queste idee primitive; non è punto necessario che conosca le idee derivate, che saranno definite man mano si progredirà nello studio.
Premesse queste osservazioni generali, passeremo rapidamente in rassegna le idee che nei comuni trattati si danno come primitive.

Sul concetto di spazio.
In quasi tutti i trattati italiani moderni si introduce per primo il concetto di *spazio*, dicendo che esso non si definisce, ma gli si attribuiscono le proprietà di essere omogeneo, illimitato, infinito, divisibile, immobile, ecc., proprietà queste parimenti non definite.
Ritenendo pertanto il concetto di spazio come fondamentale per la geometria, ne viene che non si potrebbe scrivere un trattato di questa scienza in una lingua che per avventura manchi di tali parole. Quindi non si potrebbe scrivere di Geometria nella lingua d'Euclide ed Archimede, ove appunto manca la parola corrispondente al termine *spazio*, nel senso in cui lo si usa negli odierni trattati.
In conseguenza una prima e notevole semplificazione si ottiene col sopprimere puramente e semplicemente il termine *spazio*, gli aggettivi *omogeneo*, *illimitato* e tutti i postulati che legano quel soggetto con questi attributi.
Questa osservazione sulla inutilità del termine *spazio*, in Geometria, riuscirà strana agli autori che incominciano il loro libro col parlare dello spazio.
Però l'esempio di Euclide e di tanti altri che non ne parlano affatto, è del tutto convincente. In seguito si vedrà meglio il perché della superfluità di questo termine.
Intanto però, nel presente articolo critico, si continuerà ad usare il termine *spazio* nel significato usuale.

Sui concetti di linea, superficie, solido.
Euclide definisce la linea, la superficie e il solido mediante altrettanti termini non definiti *lunghezza*, *larghezza* e *altezza*.
Molte altre definizioni furono in seguito proposte, ma tutte lasciano a desiderare.
Così da più autori chiamasi *solido* una parte dello spazio, e *superficie* il limite d'un solido. Ma anche i punti che stanno su d'una superficie o su d'una linea si trovano nello spazio, e quindi sono una parte dello spazio. I punti la cui distanza da un punto fisso è razionale, costituiscono una parte dello spazio; ciò che separa questa parte dello spazio dal rimanente spazio, cioè il contorno di questo gruppo di punti (attribuendo a queste parole il significato preciso che hanno nella teoria dei gruppi di punti), è lo spazio intero, invece di essere una superficie.
Spetta a Möbius l'osservazione, che si possono dare superficie che hanno una sola faccia, od una sola banda; vale a dire, per usare termini dell'uso comune, se si colorisce la superficie, a partire da un suo punto, con continuità, senza mai attraversare l'orlo della superficie, si finirà per aver colorita tutta la superficie, da ambe le parti di ogni punto di essa. Un esempio di siffatta superficie si forma intagliando il rettangolo ABCD, e poi riunendo i lati AB e CD, in guisa che C venga in A e B in D. Una siffatta superficie non può costituire con altre superficie comunque prese, il limite d'un solido.

Si vede così che i concetti di solido, superficie, linea, in generale, siano alquanto indeterminati; e per far vedere meglio questa indeterminazione, già altra volta, come esempio diedi l'espressione analitica d'un punto, che si muove con continuità col variare d'una variabile numerica, e tale che la linea descritta dal punto copre l'intero piano, e ogni arco di linea copre un'area piana; e indicai pure l'espressione analitica d'una curva di cui ogni arco occupa un volume.
Queste difficoltà si evitano facilmente col non parlare di solido, superficie, linea in generale, ma parlando solamente della retta, del piano, della sfera, ... cioè di quelle linee, superficie e solidi che compaiono effettivamente in Geometria elementare, lasciando alla matematica superiore lo studio di questi enti in generale.
Liberatici così dai concetti inutili e mal determinati, l'esame dei concetti fondamentali di Geometria acquista notevole semplicità.

Geometria di Posizione.
La semplificazione diventa più grande se anzitutto ci occupiamo solo di quel gruppo di proposizioni in cui non comparisce l'idea del moto, e quindi nemmeno quella di lunghezza o di altre grandezze geometriche; questo gruppo di proposizioni costituisce la Geometria di Posizione.
Il Pasch, nel suo importante libro *Vorlesungen über neuere Geometrie* (Leipzig, 1882) giunse a sviluppare la Geometria di Posizione assumendo tre soli concetti primitivi, cioè il *punto*, il *segmento rettilineo* e la porzione finita di *piano*.

Giuseppe Peano (Cuneo 1858 - Torino 1932).

Ma il terzo di questi concetti si può ridurre ai precedenti assumendo per definizione del piano, o d'una sua parte, una delle ben note sue generazioni. Sicché, ammessi i due concetti, di punto e di segmento rettilineo, si possono definire tutti gli altri enti, e sviluppare tutta la Geometria di Posizione.
Invece di dire «*c* è un punto del segmento *ab* » è forse più comodo dire «*c* giace fra *a* e *b*»; sicché tutta la geometria considerata basa sul concetto di *punto*, e sulla relazione fra tre punti *a*, *b*, *c*, espressa dalla frase «*c* giace fra *a* e *b*».
Questi concetti si debbono ottenere coll'esperienza.
In seguito si farà anche uso delle notazioni di logica matematica, e per indicare le due idee primitive, scriveremo:
p invece di «punto»,
$c \in ab$ invece di «*c* giace fra *a* e *b* ».
Un trattato di Geometria potrebbe cominciare con parole come le seguenti:
«Il punto si segna dagli agrimensori, sul terreno, con una palina o con una pietra (termine). Sulla carta, sul legno, ... con un segno fatto con un corpo terminato in punta. In agrimensura si verifica che un punto *c* giace fra *a* e *b*, quando una persona, posta in *a*, vede che l'oggetto *c* copre *b*. Dai disegnatori, fabbri, ... per riconoscere questa relazione fra i tre punti si adopera lo strumento detto *rigo;* alcuna volta si usa una corda ben tesa...».
Premessi questi od altri consimili schiarimenti, od anche soppressili del tutto, bisognerà determinare le proprietà dell'ente non definito p, e della relazione $c \in ab$, mediante assiomi, o postulati.
L'osservazione la più elementare ci indica una lunga serie di proprietà di questi enti; a noi non resta che a raccogliere queste cognizioni comuni, ordinarle, ed enunciare come postulati quelle sole che non si possono dedurre da altre più semplici. [...]
Sarà ancora utile un'osservazione sulla natura pratica, o sperimentale dei postulati. Certo è permesso a chiunque di

premettere quelle ipotesi che vuole, e lo sviluppare le conseguenze logiche contenute in quelle ipotesi. Ma affinché questo lavoro meriti il nome di Geometria, bisogna che quelle ipotesi o postulati esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche. La Geometria di Posizione, o proiettiva, poi, è una parte della Geometria generale; quindi i suoi postulati si debbono trovare fra quelli assunti per la Geometria generale.
In conseguenza, sotto il punto di vista pratico, non parmi lecito l'assumere ad es. come postulato su cui fondare la Geometria proiettiva il seguente: «Due rette giacenti in uno stesso piano hanno sempre un punto comune», poiché questa proposizione non si verifica coll'osservazione, ed è anzi in contraddizione coi teoremi di Euclide.

[da Peano, *Opere scelte*, vol. III, Cremonese, Roma 1959]

I cinque gruppi di assiomi

[di David Hilbert]

1. Gli elementi della geometria ed i cinque gruppi di assiomi.
Spiegazione. — Consideriamo tre diversi sistemi di oggetti: chiamiamo *punti* gli oggetti del primo sistema e li indichiamo con A, B, C, ...; chiamiamo *rette* gli oggetti del secondo sistema e li indichiamo con a, b, c, ...; chiamiamo *piani* gli oggetti del terzo sistema e li indichiamo con α, β, γ, ...; i punti si chiamano anche gli *elementi della geometria della retta*, i punti e le rette gli *elementi della geometria piana*, i punti, le rette ed i piani gli *elementi della geometria solida* o *dello spazio*.
Noi consideriamo punti, rette e piani in certe relazioni reciproche ed indichiamo queste relazioni con parole come «giacere», «fra», «congruente»; la descrizione esatta e completa, ai fini matematici, di queste relazioni segue dagli *assiomi della geometria*.
Noi possiamo suddividere gli assiomi della geometria in cinque gruppi; ciascuno di questi gruppi esprime certi fatti fondamentali omogenei della nostra intuizione. Indicheremo questi gruppi di assiomi nel seguente modo:

I. 1-8. Assiomi di *collegamento*,
II. 1-4. Assiomi di *ordinamento*,
III. 1-5. Assiomi di *congruenza*,
IV. Assioma delle *parallele*,
V. 1-2. Assiomi di *continuità*.

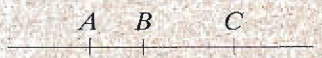
2. Il primo gruppo di assiomi: assiomi di collegamento. Gli assiomi di questo gruppo stabiliscono un *collegamento* tra gli oggetti sopra introdotti: punti, rette e piani, e suonano come segue:

I 1. *Per due punti A, B c'è sempre una retta a che appartiene ad ognuno dei due punti A, B.*
I 2. *Per due punti A, B c'è al massimo una retta che appartiene ad ognuno dei due punti A, B.*
Qui, come in seguito, per due, tre, ... punti o, rispettivamente, rette o piani, si deve sempre intendere punti o, rispettivamente, rette o piani distinti.
Useremo, invece di «appartenere», anche altre locuzioni, per esempio a passa per A e per B, a congiunge A e, ovvero con, B, A giace su a, A è un punto di a, c'è un punto A su a, e così via. Quando A giace sulla retta a ed inoltre anche su un'altra retta b, usiamo le locuzioni: le rette a e b si intersecano in A, hanno in comune il punto A, ecc.
I 3. *Su una retta ci sono sempre almeno due punti. Ci sono almeno tre punti che non giacciono su una retta.*
I 4. *Per tre punti qualsiasi A, B, C, che non giacciano su una stessa retta, c'è sempre un piano α che appartiene ad ognuno dei tre punti A, B, C. Per ogni piano c'è sempre un punto che gli appartiene.*
Usiamo anche le locuzioni: A giace in α, A è un punto di α, ecc.
I 5. *Per tre punti qualsiasi A, B, C che non giacciono su una medesima retta, c'è al massimo un piano che appartiene a ciascuno dei tre punti A, B, C.*
I 6. *Se due punti A, B di una retta a giacciono in un piano α, allora ogni punto di a è nel piano α.*
In questo caso diciamo: la retta a giace nel piano α, ecc.
I 7. *Se due piani α, β hanno in comune un punto A, allora hanno in comune almeno un altro punto B.*
I 8. *Ci sono almeno quattro punti che non stanno in un piano.*
L'assioma I 7 mette in luce che lo spazio non ha più di tre dimensioni, al contrario l'assioma I 8 che lo spazio non ha meno di tre dimensioni.
Gli assiomi I 1-3 possono venire chiamati gli *assiomi piani del gruppo* I, per distinguerli dagli assiomi I 4-8 che indico come gli *assiomi spaziali del gruppo* I.
Fra i teoremi che seguono dagli assiomi I 1-8 menzioniamo soltanto i due seguenti:

Teorema 1. — Due rette di un piano hanno o un punto in comune o non ne hanno alcuno; due piani o non hanno punti in comune ovvero hanno in comune una retta e nessun punto fuori di essa; un piano ed una retta, che non giaccia su di esso, o non hanno punti in comune, ovvero ne hanno uno.

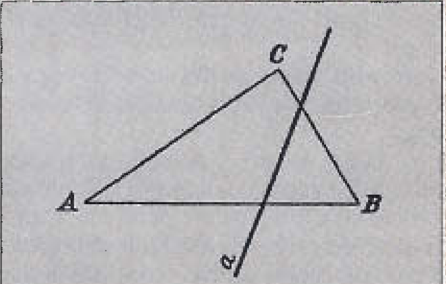
Teorema 2. — C'è sempre un piano ed uno solo che passa per una retta e per un punto che non giaccia su questa, come pure per due rette aventi un punto in comune.

3. Il secondo gruppo di assiomi: assiomi di ordinamento[1]. Gli assiomi di questo gruppo definiscono il concetto «fra» e rendono possibile, sulla base di questo concetto, l'*ordinamento* dei punti su una retta, in un piano e nello spazio.
Spiegazione. — I punti di una retta stanno fra loro in una certa relazione, per la cui descrizione ci serve particolarmente la parola «*fra*».
II 1. *Se un punto B giace fra un punto A ed un punto C, allora A, B, C sono*



tre punti distinti di una retta e B giace pure fra C ed A.
II 2. *Per ogni due punti A e C, c'è sempre almeno un punto B, sulla retta AC, tale che C giace fra A e B.*

II 3. *Di tre punti qualsiasi di una retta ce n'è al massimo uno che giace fra gli altri due.*
Oltre a questi *assiomi lineari di ordinamento* ci occorre ancora un *assioma piano di ordinamento*.
Spiegazione. — Consideriamo due punti A e B su una retta a; chiamiamo *segmento* il sistema dei due punti A e B e lo indichiamo con AB ovvero con BA. I punti tra A e B si dicono punti del segmento AB ovvero posti *all'interno* del segmento AB; i punti A, B si chiamano *estremi* del segmento AB. Tutti i punti rimanenti della retta a si dicono posti *all'esterno* del segmento AB.
II 4. *Siano A, B, C tre punti non allineati ed a una retta del piano ABC che non passi per alcuno dei punti A, B, C; allora, se la retta a passa per un punto del segmento AB, essa passa certamente anche per un punto del segmento AC ovvero per un punto del segmento BC.*



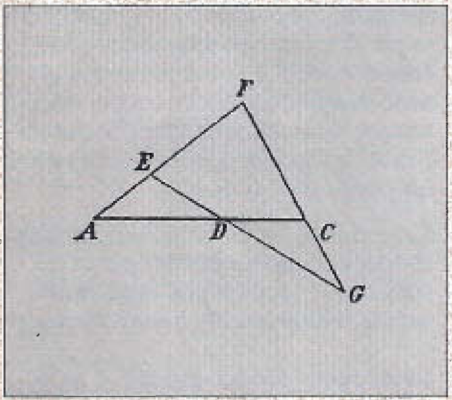
[1] M. Pasch ha studiato per primo dettagliatamente questi assiomi nelle sue *«Vorlesungen über neuere Geometrie»*, Lipsia, 1882. In particolare l'assioma II 4 risale per il contenuto a M. Pasch.

Detto in maniera intuitiva: se una retta entra nell'interno di un triangolo, essa ne esce pure. Si può dimostrare [...] che i due segmenti AC e BC non possono venire intersecati entrambi dalla retta a.

4. Conseguenze degli assiomi di collegamento ed ordinamento. Dagli assiomi I e II derivano i seguenti teoremi.

Teorema 3. — Per ogni due punti A e C c'è sempre almeno un punto D sulla retta AC che giace fra A e C.

Dimostrazione. — Per l'assioma I 3 c'è un punto E esterno alla retta AC e per l'assioma II 2 c'è su AE un punto F tale che E è un punto del segmento AF. Per lo stesso assioma e per l'assioma II 3 c'è su FC un punto G che non giace sul segmento FC. Per l'assioma II 4 la retta EG deve dunque intersecare il segmento AC in un punto D.



Teorema 4. — Di tre punti A, B, C, di una retta, ce n'è sempre uno che giace fra gli altri due. [...]

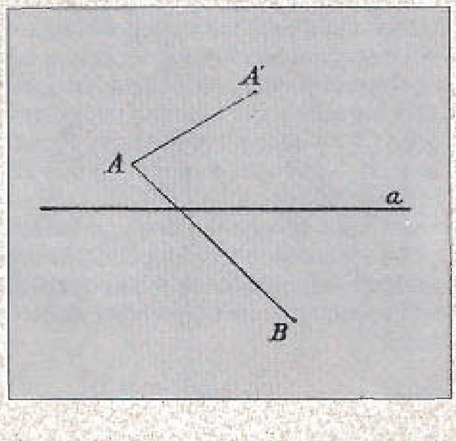
Teorema 5. — Se sono dati quattro punti qualsiasi di una retta, essi possono sempre venire indicati con A, B, C, D, in modo tale che il punto indicato con B stia fra A e C e anche fra A e D e inoltre che il punto indicato con C stia fra A e D e anche fra B e D. [...].

Teorema 7. — Tra due punti qualsiasi di una retta ci sono sempre infiniti punti.

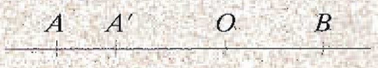
Teorema 8. — Ogni retta a, che giaccia in un piano α, divide i punti di questo piano α, che non stanno su di essa, in due regioni con la seguente proprietà: ogni punto A di una regione definisce con ogni punto B dell'altra un segmento AB internamente al quale giace un punto della retta a; al contrario, due punti A, A' di una stessa regione definiscono un segmento AA' che non contiene punti di a.

Spiegazione. — Noi diciamo: i punti A ed A' stanno *nel piano α da una stessa parte della retta a*, ed i punti A, B giacciono *nel piano α da parti opposte rispetto alla retta a.*

Spiegazione. — Siano A, A', O, B quattro punti di una retta a tali che O stia fra A e B, ma non fra A ed A'; diciamo allora: i punti A, A' giacciono *sulla retta a da una medesima parte rispetto al punto O*, ed i punti A, B giacciono *sulla retta a da parti opposte rispetto al punto O.*



Tutti i punti della retta a che stanno da una stessa parte di O si dicono anche una *semiretta* avente origine in O; quindi ogni punto di una retta la divide in due semirette.

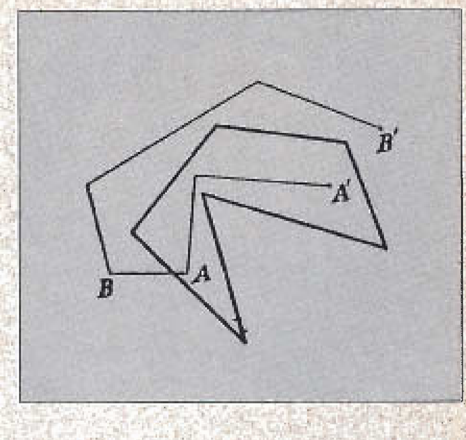


Spiegazione. — Un sistema di segmenti AB, BC, CD, ..., KL si chiama una *spezzata* che congiunge fra loro i punti A ed L; questa spezzata verrà pure indicata brevemente con $ABCD$ ... KL. I punti interni ai segmenti AB, BC, CD, ...KL, come pure i punti A, B, C, D ..., K, L si chiamano, tutti insieme, *i punti della spezzata.* Se tutti i punti A, B, C, D, ... K, L stanno, in particolare, in un piano ed inoltre il punto L coincide con il punto A, la spezzata verrà chiamata *poligono* ed indicata come poligono $ABCD$ ... K. I segmenti AB, BC, CD, ... KA si chiamano anche i *lati del poligono.* I punti A, B, C, D..., K si chiamano i *vertici del poligono.* Poligoni con tre, quattro, ..., *n* vertici si chiamano *triangoli, quadrangoli, ..., n-angoli.*

Spiegazione. — Se tutti i vertici di un poligono sono distinti, se nessun vertice del poligono capita interno ad un lato e se due lati del poligono non hanno punti in comune, il poligono si dice *semplice.*

Con l'aiuto del teorema 8 perveniamo ora ai seguenti teoremi. [...]

Teorema 9. — Ogni poligono semplice posto in un piano α divide quei punti del piano α, che non appartengono alla spezzata del poligono, in due regioni, una *interna* ed una *esterna,* con la seguente proprietà: se A è un punto di quella interna (punto interno) e B un punto di quella esterna (punto esterno), allora ogni spezzata giacente in α, che congiunga A con B, ha almeno un punto in comune con il poligono; se invece A ed A' sono due punti interni e B e B' due punti esterni, ci sono sempre spezzate in α che congiungono A con A' e B con B' e che non hanno punti in comune con il poligono. Se si contrassegnano opportunamente le due regioni, ci sono sempre in α delle rette che sono interamente all'esterno del poligono, mentre non vi è nessuna retta che stia interamente all'interno del poligono.



Teorema 10. — Ogni piano α divide i rimanenti punti dello spazio in due regioni con la seguente proprietà: ogni punto A di una regione definisce con ogni punto B dell'altra un segmento AB nel cui interno giace un punto di α, mentre due punti qualsiasi A ed A' di una stessa regione definiscono sempre un segmento AA' che non contiene punti di α.

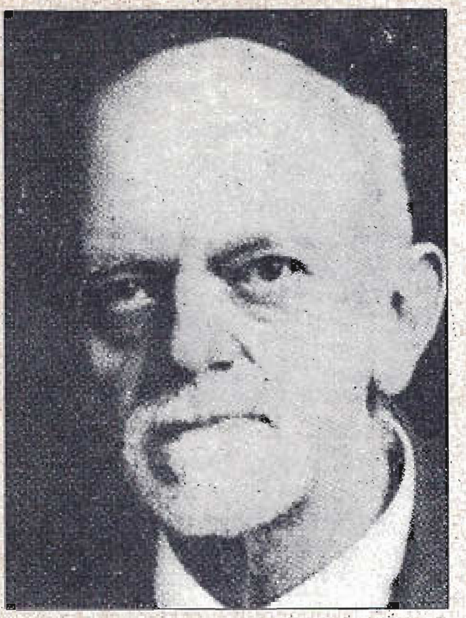
Spiegazione. — Utilizzando la nomenclatura di questo teorema 10, diremo: i punti A, A' stanno nello spazio da *una medesima parte del piano α* ed i punti A, B stanno nello spazio *da parti opposte del piano α.*

Il teorema 10 mette in evidenza i fatti più importanti nei riguardi dell'ordinamento degli elementi nello spazio; questi fatti sono dunque conseguenza soltanto degli assiomi fin qui trattati e nel gruppo II non occorre nessun nuovo assioma spaziale.

5. Il terzo gruppo di assiomi: assiomi di congruenza. Gli assiomi di questo gruppo definiscono il concetto di congruenza e quindi anche quello di movimento.

Spiegazione. — I segmenti stanno fra loro in una certa relazione per la cui descrizione ci servono le parole *"congruente"* oppure *"uguale"*.

III 1. *Se A, B sono due punti di una retta a ed inoltre A' è un punto sulla stessa retta ovvero su un'altra a', si può sempre trovare un punto B', da una data parte della retta a' rispetto ad A', tale che il segmento AB sia congruente, ov-*



David Hilbert (1862-1943).

vero uguale, al segmento $A'B'$; in simboli:

$$AB \equiv A'B'.$$

Questo assioma consente la possibilità del *trasporto* di segmenti. La unicità di quest'ultimo verrà dimostrata più avanti.

Il segmento era stato definito semplicemente come sistema di due punti A, B ed era stato indicato con AB, ovvero con BA. Dunque nella definizione non si teneva conto dell'ordine di enunciazione dei due punti; quindi le formule

$$AB \equiv A'B', \quad AB \equiv B'A',$$
$$BA \equiv A'B', \quad BA \equiv B'A'$$

hanno lo stesso significato.

III 2. *Se un segmento $A'B'$ ed un segmento $A''B''$ sono congruenti ad uno stesso segmento AB, allora anche il segmento $A'B'$ è congruente al segmento $A''B''$; ovvero, brevemente: se due segmenti sono congruenti ad un terzo, essi sono congruenti fra loro.*

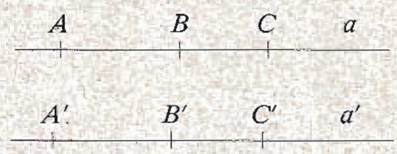
Poiché la congruenza, ovvero uguaglianza, viene introdotta all'inizio della geometria solo mediante questi assiomi, non è affatto ovvio in primo luogo che ogni segmento sia congruente a se stesso; ma questo fatto segue da entrambi i primi assiomi di congruenza, se trasportiamo il segmento AB su una qualsiasi semiretta, per esempio congruente ad $A'B'$, e quindi applichiamo l'assioma III 2 alle congruenze $AB \equiv A'B'$, $AB \equiv A'B'$.

Sulla base di quanto detto, si ottiene poi, applicando l'assioma III 2, la *simmetria* e la *transitività* della congruenza di segmenti, cioè la validità dei teoremi:

Se è	$AB \equiv A'B'$,
è pure	$A'B' \equiv AB$;
se è	$AB \equiv A'B'$,
ed anche	$A'B' \equiv A''B''$,
è pure	$AB \equiv A''B''$.

A causa della simmetria della congruenza di segmenti, possiamo usare il modo di dire: due segmenti sono *"congruenti fra loro"*.

III 3. *Siano AB e BC due segmenti senza punti in comune su una retta a ed $A'B'$ e $B'C'$ due segmenti sulla stessa retta o su un'altra retta a', sempre senza*



punti in comune; allora, se è

$$AB \equiv A'B' \quad e \quad BC \equiv B'C',$$

è pure $\quad AC \equiv A'C'.$

Questo assioma esprime la condizione di addizionabilità dei segmenti.

Il trasporto degli angoli viene trattato esattamente nello stesso modo del trasporto dei segmenti. Oltre alla possibilità del trasporto degli angoli deve, veramente, venirne richiesta assiomaticamente anche la unicità; invece la transitività e l'addizionabilità saranno dimostrabili.

Spiegazione. — Sia α un qualsiasi piano ed h, k due qualsiasi semirette distinte in α, aventi origine in uno stesso punto O, che appartengano a rette diverse. Chiamiamo angolo il sistema di queste due semirette h, k e lo indichiamo con $\sphericalangle(h, k)$, ovvero con $\sphericalangle(k, h)$.

Le semirette h, k si chiamano lati dell'angolo ed il punto O si chiama *vertice* dell'angolo.

Da questa definizione restano esclusi angoli piatti e concavi.

La semiretta h appartenga alla retta $\bar{h}$ e la semiretta k alla retta $\bar{k}$. Le semirette h e k, prese insieme al punto O, dividono i rimanenti punti in due regioni: si dicono posti all'interno dell'angolo $\sphericalangle(h, k)$ tutti i punti che stanno con h dalla medesima parte di $\bar{k}$ e con k dalla medesima parte di $\bar{h}$; tutti gli altri punti si dicono posti all'esterno, ovvero fuori dall'angolo.

Sulla base degli assiomi I e II si riconosce facilmente che entrambe le regioni contengono punti e che un segmento, che congiunga due punti interni all'angolo, si trova interamente all'interno dell'angolo. Altrettanto facilmente si possono dimostrare i seguenti fatti: se un punto H è su h ed un punto K è su k, il segmento HK è interamente interno all'angolo. Una semiretta uscente da O è tutta interna o tutta esterna all'angolo; una semiretta interna interseca il segmento HK. Se A è un punto di una delle due regioni e B uno dell'altra, ogni spezzata, che congiunga A con B, o passa per O ovvero ha almeno un punto in comune con h o con k; se invece A, A' sono due punti della stessa regione, c'è sempre una spezzata che congiunge A con A' e che non passa né per O né per un punto di h o di k.

Spiegazione. — Gli angoli stanno fra di loro in una certa relazione per la cui descrizione ci servono, in ugual modo, le parole *"congruente"*, ovvero *"uguale"*.

III 4. *Siano dati un angolo $\sphericalangle(h, k)$ in un piano α ed una retta a' in un piano α', come pure un determinato lato di a' in α'. Si indichi con h' una semiretta della retta a', che abbia origine nel punto O': c'è allora nel piano α' una ed una sola semiretta k', tale che l'angolo $\sphericalangle(h, k)$ è congruente, ovvero uguale, all'angolo $\sphericalangle(h', k')$ ed allo stesso tempo tutti i punti interni all'angolo $\sphericalangle(h', k')$ stanno dalla data parte di a'; in simboli:*

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k').$$

Ogni angolo è congruente a se stesso, cioè si ha sempre

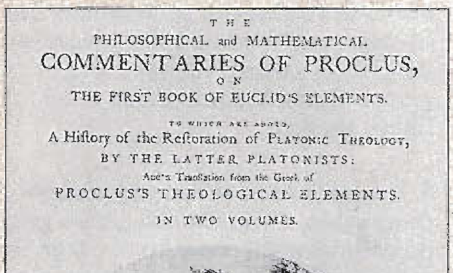
$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h, k).$$

Diciamo anche brevemente: ogni angolo può venire *trasportato* in un dato piano su una data semiretta da una sua data parte in un modo definito univocamente.

Tanto poco abbiamo tenuto in considerazione il senso per i segmenti altrettanto poco prendiamo in considerazione il verso di rotazione nella definizione dell'angolo. Quindi anche le due designazioni $\sphericalangle(h, k)$, $\sphericalangle(k, h)$ significano la stessa cosa.

Spiegazione. — Un angolo di vertice B, sui cui lati stanno rispettivamente un punto A ed un punto C, verrà anche indicato con $\sphericalangle ABC$, ovvero, brevemen-

Frontespizio della II parte dell'edizione inglese dei *Commentari di Euclide* di Proclo.



THE PHILOSOPHICAL and MATHEMATICAL COMMENTARIES OF PROCLUS, ON THE FIRST BOOK OF EUCLID'S ELEMENTS.

TO WHICH ARE ADDED,

A History of the Restoration of PLATONIC THEOLOGY, BY THE LATTER PLATONISTS:

And a Translation from the Greek of PROCLUS'S THEOLOGICAL ELEMENTS.

IN TWO VOLUMES.

VOL. II.

LONDON, PRINTED FOR THE AUTHOR:

te, $\sphericalangle B$. Gli angoli verranno pure designati con lettere greche minuscole.

III 5. *Se per due triangoli*[2] *ABC ed $A'B'C'$ valgono le congruenze*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

allora è sempre valida anche la congruenza

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'.$$

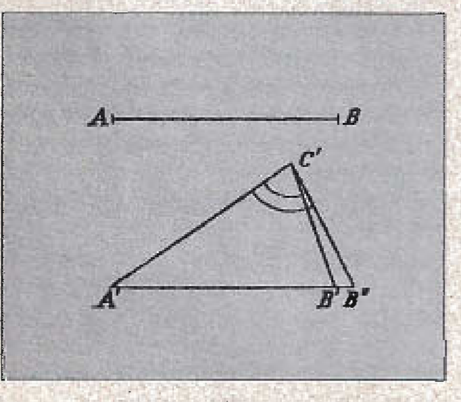
[...] Scambiando le designazioni, si ha che, sotto le ipotesi di questo assioma, sono sempre soddisfatte le due congruenze

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$$

e

$$\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'.$$

Gli assiomi III 1-3 contengono enunciati riguardanti solo le congruenze di segmenti; possono quindi venire chiamati gli assiomi *lineari* del III gruppo. L'assioma III 4 contiene enunciati sulla congruenza di angoli.
L'assioma III 5 collega concetti di congruenza di segmenti e di angoli. Gli assiomi III 4 e III 5 contengono enunciati sugli elementi della geometria piana e possono quindi venir chiamati gli assiomi "*piani*" del terzo gruppo.
L'unicità del trasporto di segmenti segue dalla unicità del trasporto degli angoli, con l'aiuto dell'assioma III 5. Si supponga che il segmento AB sia trasportato su una semiretta di origine A' in due modi, fino a B' e fino a B''. Se



scegliamo allora un punto C' fuori dalla retta $A'B'$, otteniamo le congruenze

$$A'B' \equiv A'B'', \quad A'C' \equiv A'C', \quad \sphericalangle B'A'C' \equiv \sphericalangle B''A'C',$$

e quindi, per l'assioma III 5,

$$\sphericalangle A'C'B' \equiv \sphericalangle A'C'B''$$

in contraddizione alla unicità del trasporto degli angoli, richiesta dall'assioma III 4.

[da D. HILBERT, *Fondamenti di geometria*, Feltrinelli, Milano 1970]

[2] Qui e nel seguito si deve sempre supporre per un triangolo che i suoi vertici non stiano su una retta.

Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti

(*Di* FELICE KLEIN [*a Göttingen*])*

Programma pubblicato in occasione dell'accoglimento nella Facoltà filosofica e nel Senato dell'università di Erlangen, 1872

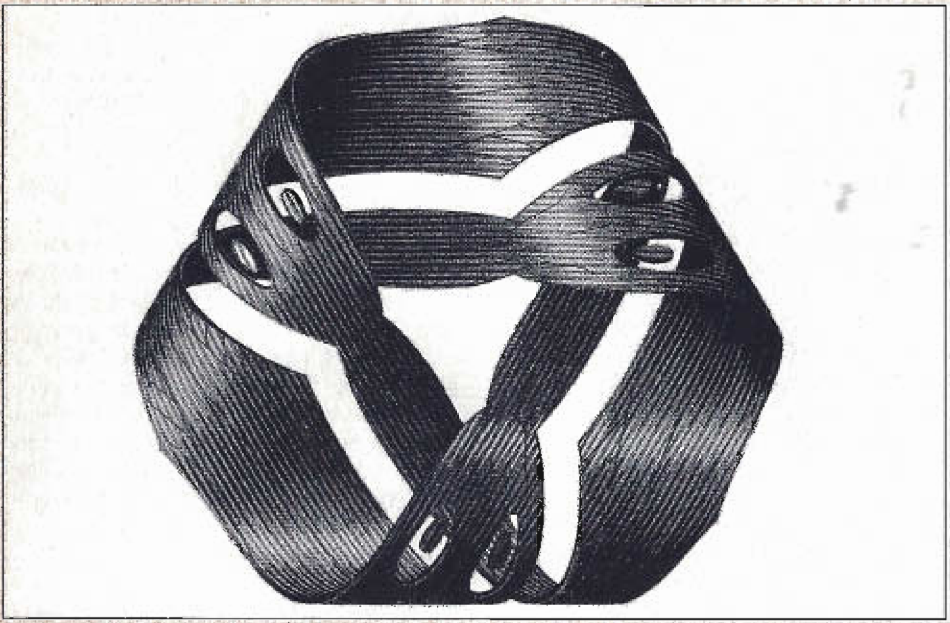
tradotto da GINO FANO

Fra i risultati ottenuti negli ultimi cinquant'anni nel campo della geometria occupa il primo posto lo sviluppo della *Geometria Proiettiva*. Benché da principio le così dette relazioni metriche, non conservandosi invariate nelle proiezioni, sembrassero inaccesibili a questa disciplina, tuttavia recentemente si è riusciti ad abbracciarle anch'esse sotto il punto di vista proiettivo, di modo che ora i metodi proiettivi comprendono tutta quanta la geometria. Solo che le proprietà metriche vi compaiono, non più come proprietà degli oggetti in sè, ma come relazioni fra essi ed una forma fondamentale, il cerchio immaginario all'infinito (delle sfere).
Confrontando le nozioni della geometria ordinaria (elementare) con questo metodo, introdottosi gradatamente, di considerare le forme dello spazio, sorge la questione, se esista un principio generale, secondo cui ambo i metodi potrebbero organizzarsi. Tale questione appare tanto più importante, in quanto che accanto alla geometria elementare ed alla proiettiva si presenta una serie di altri metodi ai quali, con tutto che meno sviluppati, convien concedere pari diritto di esistenza autonoma. Tali sarebbero la geometria dei raggi reciproci, quella delle trasformazioni razionali, ecc. le quali saranno in seguito menzionate ancora ed esposte.
Coll'assumerci di stabilire in seguito un sì fatto principio noi non veniamo certo a sviluppare alcuna idea essenzialmente nuova, ma solo delineiamo con chiarezza e precisione ciò che fu già

(*) [Alla proposta del sig. SEGRE** di pubblicare negli Annali una traduzione del mio Programma del 1872 ho accondisceso tanto più volentieri, in quanto che il primo volume testè comparso della «*Theorie der Transformationsgruppen*» di LIE (Leipzig 1888) potrebbe far sì che l'interesse dei geometri si rivolgesse maggiormente a siffatte discussioni. — La traduzione è assolutamente letterale; nei due o tre passi in cui si sono mutate alcune parole si son racchiuse fra parentesi quadre [—] le nuove espressioni. Nello stesso modo si sono contrassegnate una serie di aggiunte sotto il testo, che solo ora vi furono introdotte. F. KLEIN].

pensato da taluno con più o meno esattezza. Ma il pubblicare siffatte considerazioni comprensive appariva tanto più giustificato, in quanto che la geometria, che pur è unica nella sua sostanza, nel rapido sviluppo cui andò soggetta negli ultimi tempi si è troppo suddivisa in discipline quasi separate, che vanno progredendo alquanto indipendentemente le une dalle altre. Aggiungasi a ciò l'intenzione particolare di esporre metodi e punti di vista che vennero svolti in lavori recenti di Lie e miei. I nostri lavori, per quanto fosser diversi gli oggetti a cui si riferivano, pure d'accordo sono entrati in questo modo generale di considerazione, sicché era una specie di necessità di discutere finalmente anche questo, caratterizzando dal suo punto di vista contenuto e tendenza di quei lavori.
Benché finora siasi parlato di sole ricerche geometriche, pure vi si devono intender comprese quelle relative a varietà comunque estese, le quali si sono svolte dalla geometria coll'astrarre dalla rappresentazione nello spazio, rappresentazione non essenziale per le considerazioni puramente matematiche. Nello studio delle varietà vi sono appunto dei tipi differenti come in geometria, e si tratta, come in geometria, di mettere in rilievo ciò che v'ha di comune e di diverso in ricerche intraprese indipendentemente le une dalle altre. In via astratta, basterebbe in seguito parlare semplicemente di varietà più volte estese; ma, collegandola alle rappresentazioni geometriche più famigliari, l'esplicazione si fa più semplice e più facilmente intelligibile. Partendo dalla considerazione dei corpi geometrici, e sviluppando sopra di essi, come esempio, le idee generali, battiamo la stessa via che ha percorsa la scienza nel suo sviluppo, e che di solito nell'esposizione torna maggior conto di mettere a base.

(**) Le ragioni di questa proposta (messa poi ad esecuzione grazie al sig. FANO, studente nell'Università di Torino) non consistevano per me soltanto nell'interesse *storico* che a quest'opuscolo proviene dalla moltitudine di ricerche, specialmente del sig. KLEIN e della sua scuola che più o meno direttamente s'ispirarono da quasi un ventennio alle vaste vedute ed ai profondi concetti in esso contenuti. Questo lavoro non è, a mio avviso, abbastanza noto ai *giovani geometri italiani;* ed è specialmente per essi che ho desiderato si facesse questa ristampa. Tante idee generali ed ingegnose che si trovano in queste pagine, come l'*identità* sostanziale fra varie discipline matematiche (ed in particolare fra discipline analitiche e geometriche!) che si rappresentano l'una sull'altra quando si tenga conto dei *gruppi di trasformazioni* che in esse si pongono a base; le varie considerazioni su questi gruppi; tante giuste osservazioni che mettono sotto la luce più vera e precisano nel miglior modo il carattere di vari argomenti e varie dottrine, e specialmente di alcune più discusse, come quella delle varietà più volte estese, e la geometria non euclidea: tutte queste son cose o non sufficientemente conosciute e studiate dai giovani, o note solo per via indiretta. Su esse mi sia permesso richiamare tutta la loro attenzione.
Al prof. KLEIN pel consenso dato a questa traduzione, non che per la revisione e per le aggiunte fattevi; e così pure al sig. Direttore degli Annali per l'ospitalità gentilmente accordatale, i più vivi ringraziamenti del Traduttore e miei. C. SEGRE



M. C. Escher, *Striscia di Möbius.*

Sia data una varietà e, per la sua trattazione, un gruppo di trasformazioni ad essa relativo. Si ponga il problema di studiare le forme contenute nella varietà in relazione ad una data forma. *Allora noi possiamo o aggiungere al sistema delle forme quest'ultima data, e allora si richiederanno le proprietà del sistema così esteso in relazione al gruppo proposto; — ovvero non estendere il sistema, ma limitare le trasformazioni che si mettono a base della trattazione a quelle contenute nel gruppo medesimo che lasciano inalterata la proposta forma (e che necessariamente costituiscono ancora un gruppo).*

Contrariamente alla questione sollevata al principio del paragrafo, occupiamoci adesso dell'inversa, che si può comprendere fin d'ora. Cerchiamo quali siano le proprietà dei corpi che si conservano in un gruppo di trasformazioni comprendente quello principale come parte. Ogni proprietà che troviamo in una tale ricerca è una proprietà geometrica del corpo a sè, ma la reciproca non sussiste. In questa entra invece in vigore il principio testé riportato, nel quale ora il gruppo principale è il meno esteso. Si ha quindi:

Sostituendo al gruppo principale un altro gruppo più ampio, le proprietà geometriche si conservano solo in parte. Le rimanenti appaiono come proprietà, non più dei corpi a sè, ma del sistema che risulta aggiungendo a questi una forma speciale. Questa forma speciale (per quanto può essere determinata[8]) è definita dal fatto che, supposta fissa, concede allo spazio, fra le trasformazioni del gruppo proposto, solo quelle del gruppo principale.

Su questa proposizione riposa ciò che hanno di particolare i nuovi indirizzi geometrici che qui dobbiamo discutere, e il loro rapporto al metodo elementare. Il loro carattere è appunto quello di porre a base delle considerazioni, in luogo del gruppo principale, un altro gruppo più esteso di trasformazioni dello spazio. La loro reciproca relazione è determinata da una proposizione analoga, finché i loro gruppi si comprendono l'un l'altro. Questo vale anche per i diversi metodi di trattazione di varietà più volte estese che dobbiamo considerare. Ciò verrà ora mostrato pei singoli metodi, sui quali i teoremi stabiliti in generale in questo paragrafo e nel precedente troveranno spiegazione in oggetti concreti.

§3. Geometria proiettiva.

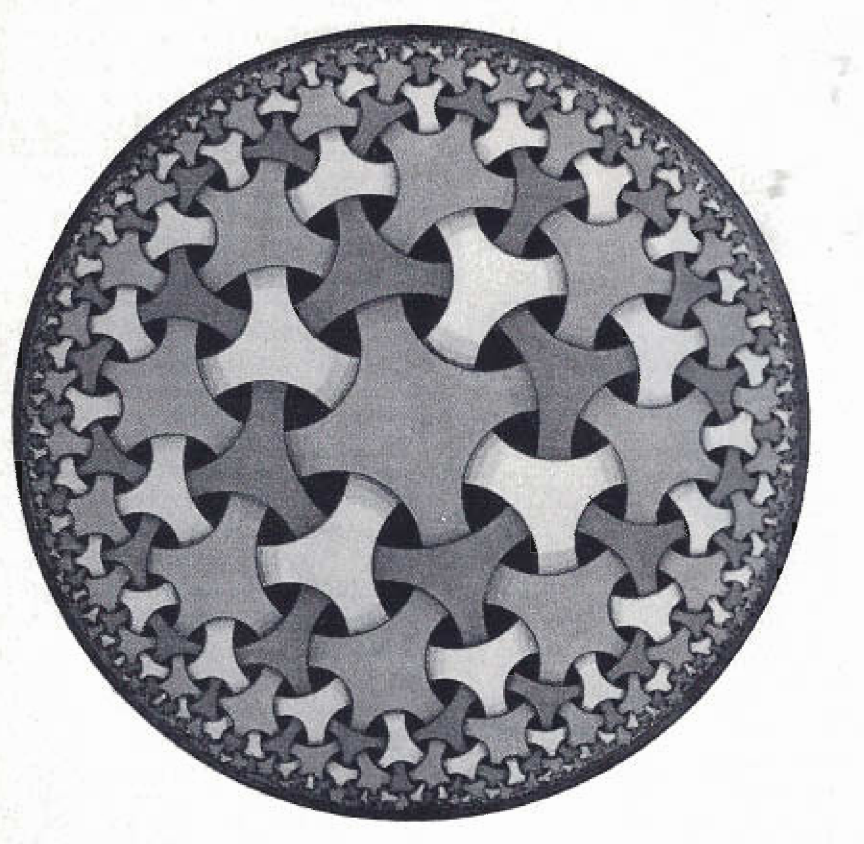
Ogni trasformazione dello spazio che non appartenga precisamente al gruppo principale può servire a trasportare a figure nuove proprietà di figure note. Così noi usiamo la geometria del piano per quella di superficie rappresentabili sopra il piano; così, già assai prima che nascesse una vera e propria geometria proiettiva, si arguivano dalle proprietà di una figura data quelle di altre che se ne deducevano per proiezione. Ma la geometria proiettiva sorse solamente coll'abitudine di considerare la figura originale come essenzialmente identica a tutte quelle che ne sono deducibili proiettivamente, e di enunciare le proprietà che si trasportano per proiezione in modo da render evidente la loro indipendenza dalle modificazioni che si hanno proiettando. Con ciò si venne a porre a base della trattazione nel senso del § 1 *il gruppo di tutte le trasformazioni proiettive, creando per tal modo il contrasto fra geometria proiettiva ed elementare.*

Un processo di sviluppo simile a quello qui citato può concepirsi come possibile in ogni sorta di trasformazioni dello spazio; e noi ci ritorneremo sopra più volte ancora. Nella geometria proiettiva stessa esso si è sviluppato ancora da due lati. Una delle estensioni del concetto si effettuò col comprendere le trasformazioni *reciproche* (dualistiche) nel gruppo posto a fondamento. Sotto il punto di vista attuale due figure duali tra loro non si considerano più come diverse, ma come essenzialmente identiche. Un altro passo si fece coll'estensione del gruppo fondamentale di trasformazioni collineari e reciproche mediante la considerazione di quelle *immaginarie* corrispondenti. Questo passo esige che siasi dapprima estesa la cerchia degli elementi propriamente detti dello spazio coll'introduzione degli immaginarii, — in modo affatto analogo a quello in cui l'introduzione delle trasformazioni reciproche nel gruppo fondamentale porta con sè quella contemporanea del punto e del piano come elementi dello spazio. Non è qui il luogo di diffondersi sull'opportunità dell'introduzione degli elementi immaginarii, per mezzo dei quali solamente si giunge alla corrispondenza perfetta fra la scienza dello spazio e il campo, qual è stato scelto, delle operazioni algebriche. Bisogna invece ben notare che la ragione di tale introduzione sta appunto nella considerazione di operazioni algebriche, e non già nel gruppo delle trasformazioni proiettive e reciproche. E come per queste ultime possiamo limitarci a trasformazioni reali, perché le collineazioni e reciprocità reali formano già di per sé un gruppo; — così pure noi possiamo introdurre elementi immaginari dello spazio, anche se non ci poniamo dal punto di vista proiettivo, e lo dobbiamo fintanto che studiamo per principio forme algebriche.

Come si abbiano a concepire le proprietà metriche dal punto di vista proiettivo, lo si determina secondo la proposizione generale del paragrafo precedente. Le proprietà metriche debbono considerarsi come relazioni proiettive rispetto ad una forma fondamentale, il cerchio immaginario all'infinito[9], forma che ha la proprietà di trasformarsi in se stessa in quelle sole trasformazioni proiettive che appartengono altresì al gruppo principale. La proposizione enunciata così semplicemente richiede ancora un'aggiunta essenziale, che corrisponde alla restrizione delle ordinarie vedute agli elementi (e alle trasformazioni) reali. Per esser d'accordo con

[8] Si genera per es. una tal forma applicando le trasformazioni del gruppo principale a un elemento originale arbitrario, che non resti invariato in alcuna delle trasformazioni del gruppo proposto. *Annali di Matematica*, tomo XVII.

[9] Questo modo di considerazione va ritenuto come una delle più belle cose [della scuola francese]; solo per mezzo di esso vien precisata la distinzione fra proprietà di posizione e proprietà metriche, quale si suol dare in principio della geometria proiettiva.



M. C. Escher, *Nastri intrecciantisi.*

questo punto di vista, bisogna ancora aggiungere espressamente al cerchio immaginario all'infinito il sistema degli elementi (punti) reali dello spazio; le proprietà nel senso della geometria elementare sono perciò proiettivamente o proprietà dei corpi a sé, ovvero relazioni fra essi e questo sistema degli elementi reali, fra essi e il cerchio immaginario all'infinito, fra essi ed entrambi.
E qui conviene por mente ancora al modo in cui v. Staudt nella sua Geometria di posizione istituisce la geometria proiettiva, — e cioè quella geometria proiettiva che si limita a mettere come fondamentale il gruppo di tutte le trasformazioni proiettivo-reciproche reali[10]. È noto come in quell'opera egli dal materiale d'osservazione ordinario estragga solo quei fatti che si conservano anche nelle trasformazioni proiettive. Volendo procedere oltre anche alla considerazione di proprietà metriche, si dovrebbero introdurre queste ultime appunto come relazioni rispetto al cerchio immaginario all'infinito. Il processo d'idee così completato è di tanta maggior importanza per le considerazioni qui esposte, in quanto che è possibile di costruire un analogo edifizio geometrico secondo lo spirito di ciascuno dei singoli metodi che ancora tratteremo.

§4. Trasporto mediante rappresentazione.

Prima di proceder oltre nella discussione dei metodi geometrici che si presentano accanto alla geometria elementare e alla proiettiva, svilupperemo in generale alcune considerazioni che occorreranno sempre di nuovo in seguito, e per cui le cose accennate finora dànno già esempi a sufficienza. A tali discussioni si riferiscono il paragrafo presente e il successivo.
Poniamo di aver esaminata una varietà A con un gruppo B come fondamentale. Se allora per mezzo di una qualche trasformazione si cambia A in un'altra varietà A', dal gruppo B di trasformazioni di A in se stessa otterremo ora un nuovo gruppo B', le cui trasformazioni si riferiranno ad A'. È allora un principio che si comprende da sè, che *la trattazione di A con B come fondamentale ci dà quella di A' con a base B'*; cioè ogni proprietà di una forma contenuta in A relativamente al gruppo B ne dà una della forma corrispondente in A' con riferimento al gruppo B'.
Sia per es. A una retta (punteggiata), B il gruppo delle trasformazioni lineari, in numero tre volte infinito, che la trasformano in se stessa. La maniera di trattare A è allora quella appunto che la nuova algebra chiama «teoria delle forme binarie». Ora la retta A possiamo riferirla ad una conica A' del piano, mediante proiezione da un punto di quest'ultima. Le trasformazioni lineari B della retta in se stessa dànno luogo allora, come facilmente si prova, a quelle B' della conica in se medesima; ossia alle trasformazioni di questa derivanti da quelle lineari del piano, che mutano la conica in se stessa.
Ma, conforme al principio del secondo paragrafo[11], è indifferente di studiare la geometria sopra una conica, pensandola come fissa e riferendosi a quelle sole trasformazioni lineari del piano che non la alterano; ovvero di studiare la geometria su quella conica, considerando in generale le trasformazioni lineari del piano, e lasciando variare assieme ad esse la conica stessa. Le proprietà che scorgevamo nei sistemi di punti sulla conica sono allora proiettive nel senso ordinario. Annodando quest'ultima considerazione al risultato testè ottenuto, abbiamo dunque:
La teoria delle forme binarie e la geometria proiettiva dei sistemi di punti su di una conica sono la stessa cosa; ossia ad ogni proposizione sulle forme binarie ne corrisponde una sopra questi sistemi di punti, e inversamente[12].
Un altro esempio atto a render più evidente questo genere di considerazioni è il seguente. Mettendo in relazione una quadrica con un piano col mezzo della proiezione stereografica, otteniamo su quella superficie un punto fondamentale: il centro di proiezione; e nel piano, due: le tracce delle generatrici passanti per esso centro. Ora, si può dimostrare senz'altro, che le trasformazioni lineari del piano che lasciano inalterati i suoi due punti fondamentali dànno luogo, per mezzo della rappresentazione, a trasformazioni lineari della quadrica in se stessa, ma a quelle solamente che non alterano il centro di proiezione. (Chiamiamo trasformazioni lineari della quadrica in se stessa quelle ch'essa subisce quando si operano trasformazioni lineari dello spazio che la sovrappongono a se medesima). Divengono per tal modo identiche la trattazione proiettiva di un piano nel quale si fissino due punti come fondamentali e quella di una quadrica in cui se ne fissi uno. La prima — qualora si considerino anche gli elementi immaginarii — non è altro che la trattazione del piano nel senso della geometria elementare. Infatti il gruppo principale di trasformazioni piane si compone appunto di quelle trasformazioni lineari che lasciano inalterata una coppia di punti (i punti ciclici). Otteniamo quindi in conclusione:
La geometria elementare del piano e la trattazione proiettiva di una quadrica con un suo punto come fondamentale sono la stessa cosa.

[10] La cerchia più estesa che comprende anche trasformazioni immaginarie fu dallo Staudt messa a base solo nei suoi «*Beiträge zur Geometrie der Lage*».

[11] Se vogliamo, il principio è applicato qui sotto una forma un po' più generale.

[12] Invece della conica nel piano possiamo introdurre, con egual successo, una cubica gobba, e in generale, nel caso di n dimensioni, qualcosa di analogo.

Tali esempi si potrebbero moltiplicare a piacere[13]; i due qui svolti furono scelti perché in seguito avremo ancora occasione di tornarvi sopra.

§5. Dell'arbitrarietà nella scelta dell'elemento dello spazio. Principio di trasporto di Hesse. Geometria della retta.

Come elemento della retta, del piano, dello spazio, e in generale di una varietà da esaminare possiamo prendere, in luogo del punto, qualunque forma contenuta nella varietà stessa: il gruppo di punti, eventualmente la curva, la superficie, ecc. Non essendovi a priori nulla affatto di fisso intorno al numero di parametri arbitrarii da cui tali forme si vogliono far dipendere, la retta, il piano, lo spazio, ecc. appariranno, a seconda della scelta dell'elemento, come varietà a quante si vogliano dimensioni. *Ma fintanto che poniamo a base della trattazione geometrica uno stesso gruppo di trasformazioni, il contenuto della Geometria rimane inalterato;* ossia ogni teorema ottenuto adottando un certo elemento dello spazio è anche un teorema qualora se ne adotti un altro qualunque; si cambiano solamente l'ordine e il collegamento delle proposizioni.

L'essenziale è dunque il gruppo di trasformazioni; il numero di dimensioni che vogliamo attribuire alle varietà appare come qualcosa di secondario.

Collegando quest'osservazione al principio del paragrafo precedente, si ottiene una serie di belle applicazioni, alcune delle quali noi svilupperemo, perché tali esempi sembrano più adatti che ogni lunga spiegazione a stabilire il significato della considerazione generale.

La geometria proiettiva sulla retta (la teoria delle forme binarie) equivale, in forza del paragrafo precedente, alla geometria proiettiva sulla conica. Su quest'ultima consideriamo ora come elemento, in luogo del punto, la coppia di punti. Ma il complesso delle coppie di punti di una conica si può riferire al sistema delle rette del piano, facendo corrispondere ad ogni retta la coppia di punti in cui essa taglia la conica stessa. Mediante questa rappresentazione le trasformazioni lineari della conica in se stessa danno luogo a quelle del piano (rigato) che la lasciano inalterata. Secondo il § 2 è poi indifferente di considerare solo il gruppo di queste ultime trasformazioni, oppure il complesso di tutte quelle lineari del piano, aggiungendo volta per volta la conica data alle forme del piano che dobbiamo esaminare. Riunendo tutte queste considerazioni, abbiamo:

La teoria delle forme binarie e la geometria proiettiva del piano con una conica come fondamentale sono identiche.

E poiché infine, appunto per l'uguaglianza del gruppo, la geometria proiettiva del piano con una conica come fondamentale coincide colla geometria metrico-proiettiva che si può istituire nel piano sopra una conica, possiamo anche dire così:

La teoria delle forme binarie e la geometria metrico-proiettiva generale nel piano sono la stessa cosa.

In luogo della conica nel piano potremmo introdurre nella considerazione precedente una cubica gobba nello spazio, ecc., ma non staremo a sviluppare questo concetto. La connessione qui stabilita fra la geometria del piano e poi dello spazio o di una varietà comunque estesa non costituisce essenzialmente altro che il principio di trasporto proposto da Hesse (Borchardt's Journal, Vol. 66).

Un esempio molto affine l'abbiamo nella geometria proiettiva dello spazio, ovvero, in altri termini, nella teoria delle forme quaternarie. Assumendo la retta come elemento dello spazio, e attribuendole, come si fa nella geometria della retta, sei coordinate omogenee, fra cui passa una relazione di condizione quadratica, le collineazioni e reciprocità dello spazio appaiono siccome quelle trasformazioni lineari delle sei variabili supposte indipendenti, che trasformano in se stessa la relazione di condizione. Applicando considerazioni analoghe a quelle testè sviluppate, otteniamo da ciò la proposizione seguente:

La teoria delle forme quaternarie coincide colla determinazione metrica proiettiva in una varietà rappresentabile con sei variabili omogenee.

Per una più minuta esposizione di un tale concetto, rinvio ad una memoria che comparirà fra poco nei Math. Annalen (vol. VI) «*Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* [*Zweite Abhandlung*]» [...].

Aggiungerò alle spiegazioni precedenti altre due osservazioni, delle quali la prima è bensì già implicitamente contenuta nelle cose dette finora, ma vuol essere più sviluppata, perché l'argomento cui si riferisce va soggetto facilmente a malintesi.

Introducendo forme qualunque come elementi dello spazio, questo può acquistare quante si vogliano dimensioni. Ma se ci atteniamo al metodo di trattazione a noi più famigliare (quello elementare o quello proiettivo), allora il gruppo che dobbiamo assumere come fondamentale per la varietà a più dimensioni ci è dato a priori, ed è appunto rispettivamente il gruppo principale o quello delle trasformazioni proiettive. Volendone assumere un altro, dovremmo uscire risp. dall'intuizione elementare o da quella proiettiva. Adunque, se è vero che, mediante una scelta conveniente dell'elemento dello spazio, quest'ultimo può rappresentare varietà a quante si vogliono dimensioni, importa però anche di aggiungere che *con questa rappresentazione o bisogna mettere fin da prima un determinato gruppo a base della trattazione della varietà, ovvero, volendo disporre del gruppo, dobbiamo poi conformarvi la nostra intuizione geometrica.* — Senza quest'osservazione si potrebbe per es. cercare una rappresentazione della geometria della retta nel modo seguente. Alla retta si attribuiscono in quest'ultima sei coordinate; e altrettanti coefficienti ha la conica nel piano. Immagine della geometria della retta sarebbe dunque la geometria in un sistema di coniche separato dal complesso delle coniche di un piano mediante una relazione quadratica tra i coefficienti. Ciò sta bene finché poniamo come gruppo fondamentale della geometria piana il complesso dei mutamenti rappresentati dalle trasformazioni lineari dei coefficienti della conica, che trasformano in se stessa la relazione di condizione quadratica. Ma se ci atteniamo alla trattazione elementare o a quella proiettiva della geometria piana, *non* abbiamo immagine *veruna*.

La seconda osservazione si riferisce alla nozione seguente. Sia dato nello spazio un gruppo qualunque, per es. il gruppo principale. Si scelga una qualche forma dello spazio, per es. un punto, una retta, o anche un ellissoide, ecc., e le si applichino tutte le trasformazioni del gruppo principale. Si ottiene così una varietà più volte estesa, con un numero di dimensioni uguale, in generale, a quello dei parametri arbitrarii contenuti nel gruppo; inferiore però in casi particolari, quando cioè la forma scelta in origine abbia la proprietà di mutarsi in se stessa mediante un numero infinito di trasformazioni del gruppo. Ad ogni varietà così generata diamo, in relazione al gruppo generatore il nome di *corpo*[14]. Ora se vogliamo considerare lo spazio secondo lo spirito del gruppo, e nel tempo stesso assumere determinate forme come elementi dello spazio, senza che cose equivalenti in quel senso vengano rappresentate in modo diverso, *dovremo evidentemente scegliere gli elementi dello spazio in modo che la loro varietà costituisca essa stessa un corpo, ovvero possa decomporsi in corpi*[15] [...].

[da *Annali di Matematica; II, 17* (1889)]

[A cura di Mario Marchi]

[13] Per altri esempi, come anche in particolare per le estensioni al caso di più dimensioni, di cui sono suscettibili quelli qui riportati, rinvio a quanto espongo in una mia Memoria: *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie*, Math. Annalen. t. V, 2, come pure ai lavori di Lie che tosto citerò ancora.

[14] Scelgo questo nome seguendo il DEDEKIND, il quale nella teoria dei numeri chiama «Corpo» un campo di numeri che risulti da elementi dati mediante date operazioni. (Seconda edizione delle Lezioni di DIRICHLET).

[15] [Nel testo non si fa sufficientemente attenzione al fatto che il gruppo proposto può contenere dei così detti sottogruppi *eccezionali*. Se una forma geometrica, rimane inalterata nelle operazioni di un sottogruppo eccezionale, lo stesso ha luogo per tutte quelle che se ne ricavano mediante le operazioni del gruppo intero, ossia per tutte le forme del corpo che da essa risulta. Ora un corpo così costituito sarebbe affatto improprio a rappresentare le operazioni del gruppo. Non si deve dunque tener conto nel testo che dei corpi risultanti da elementi dello spazio i quali non si conservino inalterati in alcun sottogruppo eccezionale del gruppo proposto].