Il pensiero scientifico di Vito Volterra

La Lucerna
editrice

Vito Volterra

CARLO FELICE MANARA
Ordinario di Istituzioni di Geometria Superiore
nella facoltà di Scienze matematiche fisiche e naturali
dell'Università di Milano

IL PENSIERO MATEMATICO TRA LA FINE DELL'800 E L'INIZIO DEL '900

1 - Il compito di rendere conto in modo completo ed esauriente di ogni aspetto del pensiero matematico all'inizio del nostro secolo costituisce una impresa gravosa e richiederebbe uno spazio molto superiore a quello che può essere occupato dalla singola relazione in un convegno come quello che qui si svolge in questi giorni; sono quindi costretto a fare delle scelte, ed a costruire una sintesi, che certamente presenterà delle lacune notevoli; lacune che a molti potranno apparire anche imperdonabili, ma che sono ovviamente segno e conseguenza delle scelte che opererò.

Penso che per dare un'idea adeguata della evoluzione della Matematica durante il secolo XIX sia utile ricordare ciò che si può leggere nella *Enciclopedia* di Diderot; quest'opera, che a ragione può essere considerata come la sintesi del pensiero scientifico del secolo XVIII, definiva la Matematica attraverso i suoi oggetti, i suoi contenuti. Invero la Matematica veniva definita come «scienza della quantità», come se quest'ultima fosse, secondo i dettami della logica classica, un «genus»,che si suddivideva in «species»: quella della quantità discreta, oggetto dell'Aritmetica, e quella della quantità continua, oggetto della Geometria. All'inizio del nostro secolo questa concezione della Matematica è completamente sparita; vorrei dire che si rinuncia a qualificare la Matematica attraverso i suoi oggetti, e si gettano le basi per la concezione moderna della Matematica, che io amerei considerare qualificata piuttosto dalle sue procedure che dai suoi contenuti; e mi piace attribuire questo cambiamento radicale nella concezione della Matematica alla evoluzione che questa scienza ha dovuto vivere durante il secolo XIX. Questo si presenta quindi ai nostri occhi come un secolo di grande ed impetuosa fioritura, durante il quale i semi gettati dalla cultura scientifica precedente hanno avuto modo di svilupparsi tanto da cambiare anche l'aspetto esteriore della scienza che li ha nutriti e fatti crescere.

Per dare una idea, anche rudimentale ed approssimata, della evoluzione di cui dicevo, adotterò provvisoriamente la enumerazione dei rami della Matematica che è diventata classica anche negli studi universitari di questa scienza: in questa enumerazione si distinguono abitualmente tre rami: quello della Geometria, quello dell'Analisi matematica, ed infine quello della Meccanica razionale e Fisica matematica; ripeto che questa suddivisione è stata qui adottata soltanto per ricerca di ordine nella classificazione, senza dare ad essa una validità superiore a quella tradizionale e convenzionale di cui ho detto; altrimenti verrebbe risuscitata quella classificazione per «generi» di contenui che io stesso poco fa ho detto sorpassata e svuotata della maggior parte dei suoi significati. Vorrei tuttavia aggiungere che — a mio parere — sarebbe forse imprudente sopprimere totalmente i rami tradizionali dell'insegnamento, anche a livello universitario; infatti io vorrei avanzare un mio modesto pensiero, il quale potrebbe essere espresso dicendo che è bensì difficile distinguere oggi i rami didattici tradizionali (Analisi matematica, Geometria, Meccanica razionale) a seconda dei loro contenuti, anche se questi ultimi hanno una certa loro sussistenza; ma io penso che, ancora oggi, abbia un senso didattico parlare di Matematica creata e costruita dall'analista, oppure dal geometra oppure dal meccanico razionale; infatti io credo che ogni ricercatore, nel momento della creazione della scienza, tragga dalle radici della propria formazione quell'insieme di tendenze, di simpatie quasi istintive, di intuizioni e di immagini che spesso danno alle opere dei grandi matematici una fisionomia che si potrebbe accostare al tratto degli artisti della figura oppure all'inimitabile stile dell'opera di un'arte qualechessia, o dell'esecutore di una musica.

2 - Per svolgere la nostra analisi, secondo la classificazione convenzionale di cui abbiamo detto poco fa, inizieremo dalla Geometria. Ci pare infatti che questo ramo classico

della Matematica tradizionale abbia avuto durante il secolo XIX lo sviluppo più clamoroso e più gravido di conseguenze, anche in campi lontani da quelli della Matematica pura. Del resto io credo che la Geometria abbia avuto un posto particolarmente importante nella Matematica tradizionale perché fa appello alla immaginazione spaziale, che a sua volta è fondata sulle nostre esperienze più elementari e sulle nostre manipolazioni degli oggetti che riteniamo rigidi.

In questo ordine di idee la Geometria costituisce, a mio parere, il primo momento di razionalizzazione delle nostre esperienze; il che giustifica la espressione che qualifica la Geometria come «primo capitolo della Fisica». Come è noto, nella visione classica la Geometria era costruita sullo stile dell'immortale trattato euclideo: un elenco di proposizioni che la tradizione ha sempre considerato accettate per la loro «evidenza» e pertanto non bisognose di dimostrazione, e un seguito di deduzioni rigorose ed ineccepibili. Ma, nel corso dei secoli, la ricerca del fondamento delle proposizioni considerate «evidenti» ha condotto alla crisi; questa si è maturata anzitutto con la costruzione delle Geometrie non-euclidee, ed in un secondo momento, ed in un modo più radicale, con la dimostrazione della compatibilità logica di queste dottrine. Io penso che questo sia stato un momento fondamentale e decisivo, che ha provocato il cambiamento radicale nella concezione della intera Matematica. Con questa dimostrazione infatti cadeva dai fondamenti l'idea che la Geometria fosse qualificata da un suo contenuto, da indentificarsi di volta in volta con la «estensione», oppure con lo «spazio geometrico», oppure con la «quantità continua» oppure con un'altra qualunque delle entità che la fertile fantasia umana può inventare per appoggiare i propri ragionamenti. Infatti, se esistesse una entità in qualche modo fisica che fonda la dottrina geometrica, tale entità non potrebbe essere conosciuta attraverso dottrine contraddittorie, come sono le varie Geometrie che l'uomo ha costruito. Segue di qui che la Geometria non è tanto qualificata dai suoi contenuti, che non hanno quella esistenza fisica presunta o immaginata per secoli dai matematici, ma dalle sue procedure, che idealizzano le nostre esperienze più fondamentali sulla nostra posizione rispetto agli oggetti che ci circondano e sulle nostre manipolazioni di questi oggetti.

Una ulteriore conferma della nostra impostazione si può avere confrontando i punti di partenza di due opere classiche relative alla Geometria: i celebri *Elementi* di Euclide e i *Grundlagen der Geometrie* di David Hilbert. Come è noto, gli *Elementi* incominciano con la celebre frase: «il punto è ciò che non ha parte» frase che è stata per secoli considerata come la definizione di un ente effettivamente esistente, da chiamarsi «punto geometrico». All'inizio del nostro secolo, D. Hilbert inizia la sua opera con la frase: «Pensiamo a tre insiemi di enti: chiameremo «punti» gli enti del primo insieme, e li indicheremo con le lettere maiuscole....»

Vediamo quindi che Hilbert, dopo il travaglio critico del secolo XIX, non pensa a definire gli enti di cui tratta con delle frasi del tipo di quelle usate da Euclide; egli si limiterà a dare di tali enti delle definizioni che vengono dette «definizioni implicite» o anche «definizioni per postulati» o infine anche «definizione d'uso», enunciando delle frasi che contengono i termini da definirsi; tali frasi, nel loro insieme, costituiscono quindi le «regole del gioco», perché sono analoghe alle regole con cui vengono definiti per esempio i pezzi del gioco degli scacchi, oppure le carte che vengono impiegate per un gioco. Carte che sono sempre materialmente le stesse, ma che cambiano di valore a seconda delle regole del singolo gioco nel quale vengono impiegate.

Questo esempio mostra, a mio parere, l'atteggiamento della Geometria nel senso moderno del termine: mostra cioè la fisionomia di una scienza che in modo molto pertinente Mario Pieri ha qualificato come un «sistema ipotetico-deduttivo»; una dottrina cioè nella quale il fondamento della validità delle proposizioni non è dato dalla loro aderenza ad una realtà qualechessia esteriore a noi, ma soltanto dalla concatenazione logica con le proposizioni scelte come primitive. Queste ultime quindi non sono più accettate per una presunta qualità di «evidenza», ma sono poste semplicemente come delle ipotesi dei ragionamenti che seguiranno.

Questo atteggiamento, come ho cercato di accennare prima, non è conseguenza di una mania di rigore e di astratezza, presunto appannaggio della mentalità eccessivamente astratta dei matematici, ma è stato imposto dalla esistenza di dottrine geometriche che sarebbero incompatibili (perché tra loro contraddittorie) se venissero considerate come delle teorie fisico-matematiche di una realtà esistente fuori di noi, ma che sono invece perfettamente compatibili se viste nella luce della Geometria astratta, considerata come un sistema puramente ipotetico-deduttivo. Del resto qualcuno ha osservato che Euclide stesso ha chiamato «postulati» alcune proposizioni che egli enuncia all'inizio del suo trattato, quasi assumendo l'atteggiamento di chi non impone i contenuti, ma semplicemente «chiede» (postula) che le proposizioni stesse vengano accettate senza peraltro imporle in modo perentorio.

Non posso dilungarmi qui ad approfondire tutta la portata di questa nuova impostazione della scienza geometrica; mi limiterò quindi a ricordare che — a mio parere — questo atteggiamento della Geometria ha ispirato anche un nuovo modo di concepire la Matematica intera, secondo quell'atteggiamento di cui ho cercato di dire poco fa. Vorrei aggiungere che, quando si accetta di non fondare più la scienza matematica su una presunta «evidenza» che scaturisca dalla osservazione della realtà esteriore, la scelta dei punti di partenza diventa libera, entro certi limiti, di cui si dirà; ciò ha permesso da una parte l'analisi approfondita dei punti di partenza della Geometria, attraverso la costruzione di diversi sistemi di proposizioni primitive. Ma ciò ha anche posto sul tappeto ulteriori problemi teorici, che hanno a loro volta stimolato le ricerche sui fondamenti logici della intera Matematica, che incontreremo nel seguito.

Nelle pagine che seguiranno ritorneremo su questi problemi, che interessano l'intera Matematica e non soltanto un suo particolare capitolo; qui vorrei proseguire il discorso che riguarda la Geometria, ricordando la nascita di nuovi rami sul vecchio tronco di questa scienza, e lo stimolo che questa nascita ha operato sul resto del pensiero matematico. Il primo di questi nuovi rami dei quali vorrei dire è la Geometria proiettiva; nato dal genio creativo di Vittorio Poncelet e da quello di Karl K. von Staudt, questo nuovo ramo della Geometria costituì un passo innovatore quale non si incontrava da molto tempo. La introduzione di nuovi punti di vista e soprattutto l'ampliamento del concetto di trasformazioni e di corrispondenze tra figure fu forse il germe che stimolò la visione unificatrice di Felix Klein il quale, con la sua celebre memoria (richiamata oggi abitualmente con la espressione «Programma di Erlangen») introdusse esplicitamente nella Geometria una struttura algebrica nuova per quei tempi: quella di «gruppo», nella sua particolare realizzazione che la presenta sotto la forma di «gruppo di trasformazioni».

Un secondo capitolo della Geometria che ebbe uno sviluppo determinante anche per il resto della Matematica fu quello che oggi chiamiamo «Geometria differenziale». In un certo senso esso ebbe le sue prime origini con la costruzione del calcolo differenziale; infatti si potrebbe dire che il problema del tracciamento della tangente di una curva qualunque (che costituisce la illustrazione geometrica del concetto di «derivata») è un problema di Geometria differenziale, cioè di analisi di fatti geometrici mediante i nuovi strumenti del calcolo. Come è noto, l'analisi fu portata avanti nel secolo XVIII, per esempio con le classiche ricerche di Leonardo Eulero sulle curvature delle sezioni normali delle superfici. Ma soltanto nel secolo XIX, per opera soprattutto di Carlo Federico Gauss, e di Bernhard Riemann ciò che era un insieme di problemi staccati e di applicazioni in certo modo episodiche divenne un ramo autonomo della scienza geometrica.

Vorrei ricordare qui in modo particolare l'opera di Riemann, perché in essa si incontra un insieme di idee che hanno ispirato un modo nuovo e geniale per impostare anche il problema dei fondamenti della Geometria; non posso ovviamente entrare qui nei particolari tecnici, e mi limiterò a ricordare gli sviluppi del calcolo differenziale assoluto, (o calcolo tensoriale) il quale permise, nei primi decenni del nostro secolo, a Tullio Levi-Civita di esprimere in forma compatta e rigorosa le intuizioni che Alberto Einstein aveva avuto sulle leggi della Fisica, ed in particolare sul fenomeno della gravitazione.

3 - Darò qui un breve cenno della evoluzione della Analisi matematica durante il secolo scorso; ancora una volta ricordo che non è possibile che si possa dir tutto, o anche soltanto avvicinarsi ad una ragionevole completezza delle informazione; pertanto ciò che sarà detto avrà il significato

di una scelta episodica di quelli che possono essere stimati i fenomeni più importanti di una evoluzione profonda delle idee matematiche.

Ho già detto, di passaggio, del collegamento tra la costruzione di alcuni concetti dell'Analisi matematica e i problemi posti dalla Geometria. Occorre aggiungere che questo collegamento con l'immagine geometrica ha avuto una funzione di stimolo assolutamente insopprimibile; ma occorre anche dire che l'immagine geometrica non è sufficiente per la fondazione logicamente rigorosa dei concetti e per lo svolgimento ineccepibile delle dimostrazioni. Si potrebbe quindi dire che il secolo XIX, per l'Analisi matematica, è stato il periodo del distacco della immagine geometrica, il momento della fondazione rigorosa dei concetti e delle procedure che li dominano e ne permettono l'applicazione e lo sviluppo.

Pertanto noi incontriamo la precisazione del concetto di «limite», che nasce dalla ovvia immagine geometrica del cosiddetto «avvicinamento indefinito», ma che deve essere fondato rigorosamente in modo autonomo; ed insieme con questo concetto incontriamo la definizione rigorosa dei due concetti di derivata e di integrale, e la precisazione del concetto di «infinito», che viene liberato dal collegamento con idee metafisiche e filosofiche per essere precisato con rigoroso linguaggio matematico.

I nomi di Bernhard Riemann, di Agostino Cauchy, di Karl Weierstrass ricorrono ad ogni passo nei trattati di oggi, come quelli dei personaggi più importanti in questo movimento di costruzione autonoma e rigorosa dei concetti della Analisi matematica. Ma tali nomi non sono i soli che occorrerebbe ricordare, se la mancanza di spazio, e il livello al quale occorre tenere questa trattazione non lo impedissero.

Mi limiterò quindi a dire che, accanto all'opera critica di revisione dei fondamenti e delle procedure dimostrative, il secolo XIX ha visto anche un'imponente opera di creazione e di invenzione. Basterà ricordare, tra i tanti capitoli nuovi, la costruzione della teoria delle funzioni di variabile complessa, teoria che oggi fa parte dell'insieme di strumenti abituali del matematico puro ed applicato. Questa teoria ha permesso di inquadrare in modo unitario tutta una serie di problemi classici, per esempio quelli riguardanti la Geometria elementare e la Geometria algebrica; inoltre ha permesso la costruzione di tutto un «corpus» di funzioni in certo senso «nuove», come le funzioni ellittiche e le funzioni definite mediante equazioni differenziali.

Infine non si può dimenticare il fatto che la necessità di precisare i concetti fondamentali degli algoritmi infiniti utilizzati dall'Analisi matematica ha stimolato le ricerche di logica formale, e le meditazioni sul concetto di «continuo» geometrico, meditazioni che hanno portato da una parte ai risultati di Georg Cantor, e dall'altra parte hanno stimolato il nostro Giuseppe Veronese alla costruzione del continuo non archimedeo; idea questa la cui fecondità e profondità è stata riscoperta in tempi recenti.

4 - Dirò infine brevemente della evoluzione della Meccanica razionale e Fisica matematica durante il secolo scorso; ho scelto volutamente di parlare di questo ramo della Matematica al terzo posto (dopo la Geometria e l'Analisi matematica) perché a questo capitolo della scienza è stato attribuito, in epoca rinascimentale, il titolo di «Paradiso delle Matematiche»; denominazione che forse non incontra il parere positivo di tutti i matematici (quasi certamente non di quelli che vorrebbero dare un titolo regale all'Aritmetica) ma che è abbastanza difendibile, se si guarda alla Fisica matematica come ad una scienza che utilizza gli strumenti matematici più moderni e raffinati per studiare i fenomeni fisici, schematizzati e resi astratti, ma non privi delle complessità che la Natura ci presenta. In questo ordine di idee, la Fisica matematica ci si presenta come la continuazione legittima e naturale della Geometria, quando questa scienza venga considerata come il «primo capitolo della Fisica»; invero la Fisica matematica, oltre alle proprietà studiate dalla Geometria nel senso classico del termine, prende in considerazione anche il fluire del tempo e il regime delle forze che provocano i moti dei corpi.

In questo ordine di idee, si potrebbe scorgere nel secolo scorso una evoluzione imponente che porta la Meccanica razionale e la Fisica matematica dallo studio del moto dei punti e dei corpi rigidi a quello dei corpi deformabili, e da quello dei fenomeni reversibili a quello dei fenomeni irreversibili, e degli scambi energetici tipici della Termodinamica.

All'inizio del secolo, il genio di Joseph Louis Lagrange diede alla Meccanica razionale la impostazione generale del moto dei sistemi meccanici comunque complicati, attraverso le equazioni che portano ancora oggi il suo nome. Ma quasi contemporaneamente un altro matematico di grande valore, Jean Baptiste Fourier, prendeva in esame il fenomeno della trasmissione del calore, ed inaugurava così lo studio dei fenomeni di questa forma di energia; questo studio iniziava la serie di ricerche sui fenomeni irreversibili della Fisica, ricerche che dovevano sfociare, alla fine del secolo, nella costruzione della Termodinamica teorica.

Inoltre lo sviluppo degli strumenti matematici permetteva ai fisici le sintesi teoriche più vaste e profonde, come quelle riguardanti la teoria del potenziale, ed i fenomeni della elettricità e del magnetismo.

5 - Ho cercato finora di delineare gli sviluppi di quelli che si possono considerare i rami classici della Matematica tradizionale, e che — come ho detto — sono ancora oggi i punti chiave dell'insegnamento dei corsi universitari di Matematica. Ma il quadro non sarebbe completo se non accennassi allo spuntare ed al crescere di nuovi polloni sul tronco, vecchio ma robusto e vivo, della Matematica secolare.

Anche in questo caso la ristrettezza dello spazio mi concede di accennare soltanto a tanti argomenti, che nel secolo scorso erano considerati quasi soltanto dei capitoli ed oggi sono delle importanti teorie.

Un primo ramo di cui vorrei dire è quello dell'Algebra: in questo campo si nota molto bene quella evoluzione della Matematica da scienza di determinati contenuti a scienza di procedure di cui ho detto sopra.

Mi pare infatti di poter dire che l'Algebra è nata in certo modo come studio delle proprietà di certi enti (numeri, razionali, reali, complessi) e poi via via si è sviluppata, cambiaando la propria fisionomia fino a diventare la dottrina delle operazioni e delle relazioni; il secolo scorso ha visto nascere e svilupparsi la teoria dei gruppi e poi ha assistito al dilatarsi ed al moltiplicarsi degli studi che avevano come oggetto delle strutture sempre più complicate e sempre più lontane da quelle tradizionali, determinate e qualificate dai contenuti classici. Questi sviluppi hanno condotto all'Algebra moderna, che ci si presenta come una delle colonne portanti dell'intero edificio della Matematica.

Un secondo ramo di cui vorrei dire è quello della Topologia; questo ramo della Matematica è stato descritto, alle sue origini, come la «Geometria delle figure deformabili»; e difatti a queste figure si potrebbe far riferimento con l'immaginazione, quando si pensi ai classici problemi studiati e risolti già da Eulero. Ma già le ricerche di B. Riemann, che avevano come oggetto le superfici oggi chiamate per l'appunto «riemanniane» avevano mostrato la fecondità dei metodi della Topologia e la profondità delle proprietà che erano oggetto delle sue attenzioni e dei suoi studi.

Sappiamo che oggi la Topologia, insieme con l'Algebra, costituisce una delle colonne portanti della Matematica moderna. Ancora una volta debbo far riferimento alla scarsezza di spazio che mi impedisce di spiegare a fondo il significato di questa scienza nello scibile matematico moderno; ma non posso passare sotto silenzio un insieme di problemi che sono stati oggetto di analisi ed anche di discussioni e di polemiche nella seconda metà del secolo scorso: si tratta dei problemi che si riattaccano alla analisi del concetto di continuo geometrico; mi soffermo su di essi perché vorrei ricordare qui ciò che ho detto poco fa, a proposito della intuizione e della immaginazione, che possono servire da stimoli per la impostazione dei problemi, ma che non possono essere considerate come degli strumenti affidabili per la loro soluzione rigorosa. Ora io penso che l'immagine del continuo geometrico fornisca un esempio abbastanza interessante di ciò che intendevo dire. Io credo che ciò che viene abitualmente chiamato «continuo geometrico» non sia oggetto di immediata sensazione, ma sia una elaborazione che la nostra fantasia costruisce sui dati dei nostri sensi, colmando le lacune delle senzazioni, estrapolando e immaginando per esempio una indefinita divisibilità e tutte le altre proprietà che la immaginazione ci presenta come «evidenti», ma che evidenti non sono, nel senso logico del termine. Infatti Giuseppe Veronese, di cui ho già detto, ha mostrato chiaramente che è possibile costruire diverse teorie del continuo, così come sono state costruite diverse teorie delle parallele. Io credo pertanto che le polemiche (oggi superate e sopite) che hanno messo di fronte Giuseppe Peano da una parte e Giuseppe Veronese dall'altra sulla natura del continuo possano essere considerate feconde, almeno come quelle che sono sfociate nella dimostrazione della compatibilità logica delle Geometrie non-euclidee. Credo infatti che si possa dire con tranquillità che non esiste un «continuo geometrico», inteso come un dato irrefutabile delle sensazioni e di una pretesa intuizione geometrica, ma che invece sia possibile elaborare diverse teorie del continuo geometrico, tutte logicamente correnti e tutte compatibili con i dati delle nostre sensazioni. La scelta di una di queste teorie per le applicazioni e per gli sviluppi dell'Analisi matematica non è quindi imposta dalla logica, ma soltanto dalla opportunità o da altri criteri, che hanno forse una loro validità, ma che trovano il loro fondamento soltanto in ragioni di semplicità (e forse anche di abitudini e di tradizioni) ma non in ragioni logiche cogenti.

Vorrei infine dire degli studi sui fondamenti della Matematica, studi che hanno avuto il loro inizio verso la metà del secolo scorso, con le ricerche di George Boole su quella che diventerà un'Algebra della logica e che trovarono in Giuseppe Peano un fondatore autorevole ed un cultore fecondo.

Vorrei ricordare qui l'opera di Peano sui fondamenti dell'Aritmetica, scritta in latino ed intitolata *Arithmetices principia nova methodo exposita;* opera in cui l'Autore prendeva una posizione, divenuta poi classica, nei riguardi dei concetti fondamentali della Matematica. Infatti egli non definisce il concetto di numero naturale in modo esplicito, ma enuncia un insieme di proposizioni primitive, quelle che ancora oggi sono richiamate con vari nomi, per esempio con la espressione «Assiomi di Peano».

Oggi non abbiamo dubbi sul fatto che questa impostazione è la sola che si può scegliere nei riguardi di concetti così fondamentali come quelli dell'Aritmetica. Ma dobbiamo riconoscere che questa metodologia è stata esplicitamente introdotta da Peano e da lui difesa nei suoi scritti scientifici. Una posizione analoga è stata presa in seguito da David Hilbert nei riguardi dei fondamenti della Geometria, come abbiamo già visto.

In questo impetuoso movimento di critica costruttiva e di creazione di nuove teorie il problema dei fondamenti della Matematica si imponeva in tutta la sua importanza; abbiamo infatti già detto, parlando dei fondamenti della Geometria, che la costruzione delle Geometrie non-euclidee aveva costretto i matematici ad abbandonare l'evidenza geometrica come fondamento delle loro teorie. Di conseguenza appariva chiaro il fatto che i punti di partenza di una teoria geometrica potessero essere scelti con una certa libertà; e nacquero di fatto anche varie ricerche sui fondamenti della Geometria, ricerche nelle quali spiccano ancora una volta i nomi di G. Peano e di uomini della sua scuola di pensiero. Tuttavia apparve anche chiaro il fatto che l'abbandono della evidenza, presa come punto di partenza e come garanzia della coerenza logica delle teorie che si costruiscono, pone molti e gravi problemi al ricercatore. Infatti, fino a che si accetta che una certa realtà fondi la coerenza logica delle teorie con la propria esistenza (che viene ovviamente supposta conoscibile e quindi coerente) il problema della compatibilità delle proposizioni primitive non si pone neppure; ma se si abbandona questo fondamento, allora si presenta il problema di garantire la coerenza interna del sistema di postulati che si enunciano con mezzi diversi da quelli che fanno appello ad una realtà esteriore, accettata come punto di partenza della teoria che si costruisce. Si impone quindi la necessità di approfondire l'analisi dei fondamenti del nostro stesso modo di ragionare e delle procedure di deduzione.

È facile comprendere che questo insieme di problemi diede origine ad un intero nuovo capitolo della Matematica, che contiene appunto le ricerche sulla logica e sui fondamenti di questa scienza; e chiunque capisce che questo terreno di ricerca spinge i propri confini sino alla problematica epistemologica e filosofica, che contempla il significato e le ragioni delle nostre conoscenze e delle nostre certezze.

6 - Abbiamo passato brevemente in rassegna il travaglio critico e creativo della Matematica del secolo XIX, e possiamo così avere un quadro abbastanza approssimato della situazione del pensiero matematico all'inizio del nostro secolo. Sarebbe difficile dare un panorama completo della Ma-

tematica contemporanea anche perché il quadro oggi è invaso, in modo sempre più pesante, dalla presenza dei nuovi mezzi di calcolo e di elaborazione dell'informazione; e penso che sia difficile valutare oggi tutta l'importanza ed il peso di questa presenza sulla Matematica dei prossimi decenni e forse anche soltanto dei prossimi anni. Devo quindi limitarmi a dire ciò che penso su quella evoluzione della nostra Matematica che — a mio parere — ha avuto le sue origini proprio in correnti di pensiero nate all'inizio del nostro secolo; e — come al solito — potrò dare soltanto dei cenni generici su questioni che meriterebbero certo delle trattazioni ben più importanti.

Il primo argomento di cui vorrei parlare è l'affermarsi sempre più imponente della Analisi funzionale; questo ramo dell'Analisi matematica ha delle radici molto lontane nel tempo: si potrebbe infatti riconoscere l'origine delle ricerche dell'Analisi funzionale nei primi problemi di calcolo delle variazioni. In questi problemi le incognite non sono soltanto delle figure (come nei problemi di Geometria), oppure dei numeri o dei gruppi di numeri (coordinate di punti, o valori di funzioni), ma sono addirittura delle funzioni. Forse non era presente ai primi matematici che posero ed in parte risolsero questi problemi il radicale cambiamento di panorama che essi portavano con sè; ma la coscienza di questo fatto divenne via via più chiara col passare del tempo e col crescere della letteratura. All'inizio del nostro secolo il concetto di «funzionale» fu elaborato in modo rigoroso ed applicato a problemi importanti della Fisica matematica ad opera di un gruppo di matematici, tra i quali spicca Vito Volterra, che — per parte sua — sviluppò una teoria delle equazioni integrali di un certo tipo che ancora oggi viene chiamato con il suo nome. È apparso chiaro in seguito che i concetti, creati e sviluppati su queste idee geniali, dovevano diventare di grande importanza ed utilità per la risoluzione di numerosi problemi che fino a quell'epoca non avevano avuto risposta.

Il secondo argomento di cui vorrei parlare ha un certo collegamento con ciò che ho detto all'inizio di questa mia breve rassegna, parlando della evoluzione della Matematica, da scienza che si considerava qualificata dai suoi contenuti a scienza che è piuttosto qualificata dalle sue procedure.

Infatti, se la Matematica si considera qualificata dai suoi contenuti, è facile essere condotti a pensare che questi debbano essere i contenuti tradizionali: i numeri, la quantità o che altro si voglia definire come oggetto determinante della scienza matematica. Ma se si abbandona questo atteggiamento riduttivo, è chiaro che l'orizzonte delle applicazioni della Matematica si amplia di molto. Sarebbe imprudente dire qui ora che non si scorgono ancora i suoi confini, ma è fuori dubbio che questi si siano molto allontanati dalla posizione in cui la visione riduttiva li vorrebbe bloccare.

Mi pare di poter dire che i sintomi di questo allargamento dei confini delle competenze della Matematica si possono scorgere nelle opere di Vilfredo Pareto, sulla applicazione della Matematica alla Economia, e nelle opere di Vito Volterra, sulla teoria della matematica della lotta per la vita. Mi pare di grande interesse il fatto che la realtà economica e biologica, fuori dall'ambito relativamente ristretto e limitato (della tecnica e della Fisica) che veniva considerato l'unico campo di applicazione della Matematica, abbia offerto i problemi e gli spunti per un allargamento dell'orizzonte delle ricerche matematiche. Si è aperto così un varco importante nel muro che pretendeva forse di confinare la Matematica nella immagine di «scienza dei numeri»; e vorrei anche affermare che i progressi della scienza e della tecnica di oggi non sarebbero possibili senza la Matematica. Noi vediamo infatti che quelle ricerche le quali soltanto poco tempo fa erano considerate come astratte e conseguentemente giudicate inutili sono oggi diventate fondamentali per un grande numero di applicazioni. Il che ci dà conferma — se mai ce ne fosse bisogno — della grande difficoltà di prevedere il cammino della intelligenza, che è feconda di risultati e di luci là dove essa è veramente libera.

In un celebre discorso di cui diremo tra poco, al Congresso mondiale dei matematici tenutosi a Parigi nel 1900, David Hilbert affermava che ci sarebbe ben poco della Matematica moderna se la Geometria e la Fisica non fossero state delle fonti generose di problemi, anche teorici; ma abbiamo anche visto che, a loro volta, le scoperte teoriche astratte diventano ben presto feconde di applicazioni pratiche spesso inaspettate; vorrei dire che la Matematica agisce costantemente come una fonte di continue meraviglie, di scoperte, di testimonianza della inesauribile vitalità dell'intelligenza umana.

Ho detto poco fa nel discorso che David Hilbert tenne al congresso mondiale dei matematici, che si svolse a Parigi proprio all'inizio di questo secolo; in quel discorso Hilbert, oltre a delineare da pari suo il panorama della Matematica a quell'epoca, enunciò anche i celebri 14 problemi non risoluti che costituirono in qualche modo la traccia delle ricerche matematiche più importanti del nostro secolo.

Per chiudere questa mia breve rassegna, vorrei anche ricordare, accanto al celebre discorso di Hilbert, le opere di sintesi del pensiero matematico che vennero progettate ed in parte realizzate a cavallo dell'inizio del nostro secolo. Una di queste è la celebre *Enzyklopaedie der matematischen Wissenschaften,* progettata da un gruppo di matematici francesi e tedeschi ed alla quale vennero chiamati a collaborare i migliori matematici dell'inizio del secolo. Tra i matematici italiani che presero parte a quest'opera ricorderò qui Guido Castelnuovo, Federigo Enriques, Gino Fano, Luigi Berzolari e quel Vilfredo Pareto di cui ho già detto, professore all'Università di Losanna ma italiano di origine. È noto che la prima guerra mondiale, tra gli altri danni che fece, provocò anche il declino di questo interessantissimo progetto di collaborazione scientifica internazionale, progetto che tuttavia sopravvisse fin verso gli anni '20.

La seconda opera di sintesi è di mole molto diversa, e porta l'impronta di un solo ricercatore, che ha lasciato un'orma difficilmente cancellabile nella mentalità e nel pensiero matematico: intendo dire di Giuseppe Peano e della sua opera, intitolata *Formulario Mathematico,* concepito e portato a compimento da Peano stesso e dalla sua scuola. Ricorderò che all'epoca del progetto del *Formulario* Peano aveva già dato prova della originalità e della profondità del suo pensiero con risultati fondamentali; per esempio egli aveva già fornito la dimostrazione del teorema di esistenza delle soluzioni delle equazioni differenziali, ed aveva già costruito quel celebre esempio di «curva» che riempie un intero quadrato che stimolò la critica dei concetti di «funzione continua» e costrinse i cultori di Geometria e di Topologia a precisare le proprie definizioni ed a chiarire i propri concetti.

Gli studi sui fondamenti dell'Aritmetica e della Geometria avevano condotto Peano ad analizzare anche i fondamenti della Logica, e l'avevano stimolato a costruire quel sistema di notazioni simboliche che sono ancora oggi adottate da varie scuole di Logica matematica. È noto poi che l'incontro con Peano stimolò Bertrand Russel ad avviarsi verso gli studi dei fondamenti della Matematica e della Logica che lo resero celebre.

Il *Formulario* costituisce in certo modo la realizzazione di certi ideali che Peano coltivava da tempo: quello di costruire un sistema di notazioni rigorose, che evitassero il ricorso al linguaggio comune negli enunciati e nelle dimostrazioni, e quello di inventare un linguaggio scientifico che superasse le difficoltà frapposte alla comunicazione dalla esistenza delle lingue nazionali. Il sogno di quello che egli chiamava «interlingua» è oggi dimenticato; l'ideale delle notazione logiche vive, come abbiamo detto, a testimonianza della validità del suo pensiero e della profondità delle sue intuizioni.

Vorrei chiudere definitivamente il mio dire ricordando ciò che Galileo ha detto della Matematica, vista come linguaggio della scienza, affermando che il gran libro dell'Universo che continuamente ci sta aperto dinnanzi agli occhi è scritto in caratteri matematici ed aggiungendo che chi non saprà leggere questi caratteri è destinato ad aggirarsi nell'Universo come in un oscuro labirinto.

Se è vero che la Matematica rappresenta una luce, anche se piccola, in questo labirinto, allora i suoi cultori illustri, che noi ricordiamo ed onoriamo, sono i portatori delle fiaccole che guidano la nostra intelligenza a quel poco di comprensione che ci è dato di avere nella condizione umana.