ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE
Estratto dai *Rendiconti*, Classe di Scienze — Vol. LXXXVII — 1954

I GRUPPI CICLICI DI TRASFORMAZIONI PIANE DI JONQUIÈRES

Nota di Carlo Felice Manara

ULRICO HOEPLI
Libraio dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere

MILANO
1954

I GRUPPI CICLICI DI TRASFORMAZIONI PIANE DI JONQUIÈRES

Nota di CARLO FELICE MANARA

Presentata dal m. e. Oscar Chisini
(Adunanza dell'11 marzo 1954)

Sunto. — Si classificano le trasformazioni piane di Jonquières di tipo ciclico e se ne danno le forme canoniche.

§ 1. - Scopo del presente lavoro è la classificazione e la riduzione a forma canonica dei gruppi ciclici finiti di trasformazioni piane di Jonquières.

I gruppi finiti di trasformazioni piane birazionali sono stati oggetto di svariate ricerche da tempo: per tacere dei classici lavori del Bertini sulle involuzioni piane, ricordiamo che S. Kantor [1] ha classificato i gruppi finiti di trasformazioni cremoniane piane; la sua analisi venne poi ripresa e perfezionata da Wiman in epoca successiva [2].

Tuttavia le classificazioni date da questi Autori non possono esser dette complete, almeno per quanto riguarda i gruppi ciclici di trasformazioni piane di Jonquières, anzi il Wiman dà un enunciato in cui non rientrano alcuni tipi che abbiamo ritrovati nella presente trattazione [3]; inoltre questi Autori non si sono posti il problema della riduzione a forma canonica delle trasformazioni studiate; se lo è posto T. Turri in un recente lavoro sull'argomento [4] ma ha dato degli enunciati inesatti per essersi tra l'altro lasciato sfuggire alcuni casi.

(1) KANTOR S.: *Premiers fondements por une théorie des transformations périodiques univoques.* Atti R. Acc. Sci. Napoli (2) 1 (1838).

(2) WIMAN A.: *Zur Theorie der endliche Gruppe von birationale Transformationen in der Ebene.* Math. Ann. 48, 195 (1897).

(3) WIMAM A.: *Loc. cit.*, pag. 205.

(4) TURRI T.: *Sulle traformazioni piane cicliche di De Jonquières*, Rend. Semin. Facoltà Scienze Univ. Cagliari, 18 (1948).

Ci è parso quindi opportuno occuparci dell'argomento per dare una classificazione di tutti i possibili gruppi ciclici di trasformazioni piane di Jonquières assegnando insieme le loro forme canoniche.

In tutta la presente trattazione indicheremo sempre con T una trasformazione piana ciclica di Jonquières e con n il suo periodo, cioè il minimo intero per cui si ha:

$$T^n = 1.$$

Indicheremo poi con S il centro del fascio di rette invariante per T (e quindi per tutto il gruppo da essa generato).

Infine, dato un punto P_0 di coordinate x_0 ed y_0, indicheremo con $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2) \dots P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ i suoi trasformati mediante la T, la $T^2 \dots$ la T^{n-1}, rispettivamente; questi punti sono ovviamente tutti distinti tra loro se P_0 è generico; diremo al solito che i punti $P_0\, P_1 \dots P_{n-1}$ formano un ciclo per la trasformazione T.

La trasformazione T subordina nel fascio invariante di rette di centro S una proiettività σ, che nel nostro caso è pure ciclica. Indicheremo il suo periodo con s; questo numero, come è ovvio e noto, può essere l'unità, oppure uguale ad n oppure infine un divisore proprio di n. Noi classificheremo anzitutto e ridurremo a forma canonica le trasformazioni per cui è $s = 1$, ossia per cui la proiettività σ è l'identità (§ 2); poi ridurremo a forma canonica le trasformazioni per cui è $s = n$, dimostrando che esse posseggono un fascio di curve razionali invarianti e quindi sono cremonianamente equivalenti alle precedenti (§ 3); infine studieremo e classificheremo quelle trasformazioni per le quali s è un divisore proprio di n (diverso cioè da n stesso e dall'unità), caratterizzando quelle tra esse che sono birazionalmente equivalenti alle precedenti e quelle che non lo sono (§§ 4, 5, 6).

§ 2. - Sia dunque anzitutto una trasformazione piana T di Jonquières, ciclica di periodo n, subordinante l'identità sul fascio di rette S. Potremo sempre supporre di avere operato una omografia in modo che il centro S del fascio di rette unite sia il punto improprio dell'asse delle y di un sistema cartesiano. Allora su una retta del fascio S passante per un punto generico $P_0(x_0, y_0)$ del piano la T subordina una proiettività ciclica $\tau(x_0)$ di periodo n, proiettività che dipende chiaramente soltanto dal valore x_0 ed i cui punti uniti (certamente distinti) saranno da noi chiamati U e V.

Conviene distinguere due casi: quello (in certo modo da riguardarsi come generico) in cui è $n > 2$ e quello in cui è $n = 2$. Poniamo anzitutto che sia $n > 2$. Sussiste allora il seguente

LEMMA. La trasformazione T ammette una curva di punti uniti spezzata in due curve razionali, unisecate dalle rette del fascio S.

Infatti consideriamo i due punti U e V uniti per la proiettività $\tau(x_0)$ subordinata dalla T sulla retta $x = x_0$.

Se al variare della retta nel fascio S i due punti U e V descrivessero una unica curva irriducibile, sarebbe possibile far descrivere al punto indice del valore x nel piano della variabile complessa x un cammino chiuso, partente dal punto x_0, in modo che al ritorno i punti U e V risultino scambiati tra loro. Ma allora la proiettività $\tau(x_0)$ risulterebbe al ritorno scambiata nella sua inversa, come si verifica facilmente quando si ricordi che, indicate con $u(x_0)$ e $v(x_0)$ le ordinate di U e V ed indicata con ε una opportuna radice n-esima primitiva dell'unità, la suddetta proiettività può essere scritta nella forma:

$$\frac{y_1 - u(x_0)}{y_1 - v(x_0)} = \varepsilon \, \frac{y_0 - u(x_0)}{y_0 - v(x_0)} .$$

Chiameremo u e v le curve descritte dai punti U e V rispettivamente al variare della retta $x = x_0$ nel fascio S. Dunque nel riferimento scelto, la u è rappresentata da una equazione del tipo:

$$u \equiv \{a(x) \cdot y + b(x) = 0\}$$

dove $a(x)$ e $b(x)$ sono dei polinomi nella x; analogamente la curva v è rappresentata da una equazione del tipo:

$$v \equiv \{c(x) \cdot y + d(x) = 0\}$$

dove ancora $c(x)$ e $d(x)$ sono polinomi nella x.

Operiamo ora nel piano trasformazione birazionale Θ data dalle equazioni:

$$\Theta \equiv \begin{cases} \mathrm{X} = x \\ \mathrm{Y} = \dfrac{a(x) \cdot y + b(x)}{c(x) \cdot y + d(x)} . \end{cases}$$

Essa trasforma la curva u nella retta di equazione $\mathrm{Y} = 0$ e la curva v nell'intorno del punto improprio dell'asse delle Y. Pertanto la trasformazione $\overline{\mathrm{T}} = \Theta^{-1}\,\mathrm{T}\,\Theta$, trasformata di T mediante la Θ, subordina su ogni retta di equazione $\mathrm{X} = \mathrm{X}_0$ una proiettività ciclica di periodo n avente come uniti i valori zero ed infinito della Y; ricordando le equazioni canoniche di tale proiettività potremo concludere che la $\bar{T}$ è una omologia ciclica avente le equazioni:

$$\bar{T} \equiv \begin{cases} X_1 = X_0 \\ Y_1 = \varepsilon Y_0 \end{cases}$$

dove ε è una radice n-esima primitiva dell'unità.

Potremo quindi concludere l'analisi fatta fin qui enunciando il

Teorema I. - Una trasformazione di Jonquières ciclica di periodo $n > 2$ che ammette un fascio di rette unite è birazionalmente identica ad una omologia, ciclica di ordine n, di equazioni:

$$\begin{cases} X_1 = X_0 \\ Y_1 = \varepsilon Y \end{cases}$$

e proiettivamente identica ad una trasformazione di equazioni:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \\ \dfrac{a(x_1)\cdot y_1 + b(x_1)}{c(x_1)\cdot y_1 + d(x_1)} = \varepsilon \dfrac{a(x_0)\,y_0 + b(x_0)}{c(x_0)\,y_0 + d(x_0)} \end{cases}$$

che assumeremo come forma canonica.

Sia poi in particolare $n = 2$; in questo caso non vale il ragionamento che abbiamo fatto sopra per dimostrare che i punti U e V devono descrivere due diverse curve al variare della retta nel fascio S. Infatti in questo caso la proiettività subodinata da T sulla retta generica $x = x_0$ è una involuzione che coincide con la propria inversa.

Pertanto, oltre alla trasformazione che si ottiene come caso particolare dalla precedente facendo in essa $n = 2$ e quindi $\varepsilon = -1$, si ha in questo caso anche la seguente:

$$T \equiv \begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 = -\dfrac{y_0\,\beta(x_0) + \gamma(x_0)}{y_0\,\alpha(x_0) + \beta(x_0)} \end{cases}$$

dove $\alpha(x)$, $\beta(x)$ e $\gamma(x)$ sono polinomi nella x. In questa trasformazione i punti uniti stanno sulla curva iperellittica ([5]):

([5]) Qui e nel seguito usiamo la espressione «curva iperellittica» nella sua accezione più vasta di «curva che possiede (almeno) una g^1_2 effettiva».

(2) $$y^2\alpha(x) + 2y\beta(x) + \gamma(x) = 0$$

la quale è irriducibile non appena il polinomio:

$$\Delta(x) = \beta^2 - \alpha\gamma$$

abbia qualche radice di molteplicità dispari. Ora mediante la trasformazione Θ data dalle equazioni:

$$\Theta \equiv \begin{cases} X = x \\ Y = \alpha(x) \,.\, y + \beta(x) \end{cases}$$

la curva (2) può essere ridotta alla forma canonica:

$$Y^2 = F(X)$$

essendo $F(X)$ un polinomio nella X; di conseguenza la trasformata della T mediante la Θ risulta essere in questo caso della forma:

$$\begin{cases} X_1 = X_0 \\ Y_1 Y_0 = F(X_0). \end{cases}$$

Possiamo quindi concludere l'analisi svolta fin qui enunciando il seguente:

Teorema II. - Le trasformazioni di Jonquières cicliche a periodo 2 che ammettono un fascio di rette unite sono di due tipi: una trasformazione del primo tipo ha curva di punti uniti riducibile e si ottiene come caso particolare di quelle di periodo maggiore di due; una del secondo tipo è essenzialmente distinta dalle precedenti ed è birazionalmente equivalente ad una trasformazione avente la forma:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 y_0 = F(x_0) \end{cases}$$

che assumeremo come forma canonica.

§ 3. - Sia ora una trasformazione T di Jonquières ciclica di periodo n che subordina sul fascio S invariante di rette una proiettività ciclica σ di periodo n.

Un classico ragionamento dovuto a Nöther permette di riconoscere che in questo caso esiste un fascio di curve razionali invarianti per la T ed unisecanti le rette del fascio S fuori di S.

Ora è sempre possibile portare, con una trasformazione birazionale, queste curve in rette e pertanto è possibile con la stessa trasformazione ridurre la T ad una trasformazione avente un fascio di rette unite, e quindi ricondurre questo caso al precedente.

Il ragionamento a cui accennavamo sopra si deduce facilmente da quello che M. Nöther svolge per dimostrare un suo fondamentale teorema che afferma la razionalità delle superfici che contengono un fascio razionale di curve razionali ([6]); precisamente la dimostrazione si ottiene parafrasando gli analoghi ragionamenti che valgono a ridurre a forma canonica le trasformazioni T a periodo due. Invero si consideri una superficie Φ i cui punti siano in corrispondenza biunivoca con i cicli $P_0\, P_1 \ldots P_{n-1}$ della T; su questa superficie esiste un fascio razionale di curve razionali, precisamente il fascio di curve che corrispondono ai cicli di n rette del fascio S corrispondenti nella σ e nelle sue potenze.

Ognuna di tali curve è razionale perchè i suoi punti sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta del fascio S.

Ora la superficie Φ contenendo un fascio razionale C di curve razionali C è essa stessa razionale — per il teorema di Nöther sopra ricordato — e pertanto si può costruire sopra di essa un secondo fascio lineare di curve K razionali ed unisecanti le C.

Ciò posto, alle curve K corrisponderanno nel piano in cui è data la trasformazione T delle curve invarianti; esse costituiranno un fascio ed intersecheranno ogni retta del fascio S in un sol punto variabile fuori di S secando inoltre le rette appartenenti ad un ciclo della proiettività σ in punti appartenenti ad un ciclo della trasformazione T.

Si noti che in questa dimostrazione ha fondamentale importanza l'ipotesi che gli n punti costituenti un ciclo della T stiano su n rette costituenti un ciclo della proiettività σ del fascio S, cosicchè su ogni retta stia *un solo* punto.

Pertanto questo ragionamento non è applicabile al caso in cui il periodo s della σ sia minore di n, di modo che su ogni retta di un ciclo della σ stia più di un punto appartenente ad un ciclo della T. Possiamo pertanto concludere l'analisi svolta in questo paragrafo enunciando il

Teorema III. - Una trasformazione T di Jonquières, ciclica di periodo n, la quale subordini sul fascio invariante di rette una

---

([6]) Nöther M.: *Über Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen.* Math. Ann. 3 (1871).

proiettività avente lo stesso periodo n, è birazionalmente equivalente ad una trasformazione di Jonquières la quale abbia un fascio di rette unite.

È appena necessario enunciare il

Corollario. - Ogni trasformazione T di Jonquières ciclica avente un periodo n che sia un numero primo è birazionalmente equivalente ad una omologia ciclica di periodo n.

§ 4. - Sia ora T una trasformazione ciclica di Jonquières di periodo n la quale subordini sul fascio S (invariante) una proiettività σ (ovviamente ciclica) il cui periodo s sia un divisore proprio di n; poniamo:

$$n = \nu s \text{ (7)}.$$

Ora la σ ammette due rette unite distinte che, con una trasformazione proiettiva, potremo sempre portare nella retta di equazione $x = 0$ e nella retta impropria di un riferimento cartesiano. Conveniamo di indicare, qui e nel seguito, con η una radice s-esima primitiva dell'unità. Pertanto in questo riferimento la σ risulta espressa dalla equazione:

$$x_1 = \eta x_0 .$$

Consideriamo ora la trasformazione $T_1 = T^s$; essa è ciclica di periodo $n/s = \nu$ e lascia ferme tutte le rette del fascio S. Pertanto essa ricade sotto la discussione che abbiamo dato al § 2 delle trasformazioni di questo tipo; in particolare essa subordina su una retta generica $x = x_0$ una proiettività $\tau_1(x_0)$ ciclica di periodo $n/s = \nu$. Inoltre la $T_1 = T^s$ è invariante per la T. Ne consegue che la T porta la proiettività $\tau_1(x_0)$ subordinata dalla T_1 su una retta generica $x = x_0$ nella proiettività $\tau_1(x_1)$ subordinata dalla stessa T_1 sulla retta corrispondente $x = x_1 = \eta x_0$. Sussiste in particolare il seguente

Lemma. - La T porta i punti uniti della $\tau_1(x_0)$ nei punti uniti della $\tau_1(x_1)$.

Sono ora anche qui da distinguersi due casi: quello in certo senso generico, in cui è $\nu > 2$ e quello in cui è $\nu = 2$.

Poniamo anzitutto che sia $\nu > 2$; allora su una retta generica del fascio S la $T_1 = T^s$ subordina, come abbiamo visto, una

(7) I casi trattati in questo paragrafo e nei seguenti sono sfuggiti all'attenzione di Turri, il che ha condotto questo A. a dimostrazioni fallaci e ad enunciati inesatti.

proiettività ciclica di periodo ν avente due punti distinti U e V i quali — a norma della discussione svolta al § 2 — descrivono due curve razionali distinte: u e v rispettivamente.

Potremo anche qui scrivere le equazioni delle due curve nella forma:

$$u \equiv \{y \,.\, a(x) + b(x = 0\}$$

$$v \equiv \{y \,.\, c(x) + d(x) = 0\}$$

e considerare la trasformazione Θ data dalle equazioni:

$$\Theta \equiv \begin{cases} X = x \\ Y = \dfrac{y \,.\, a(x) + b(x)}{y \,.\, c(x) + d(x)} \end{cases}$$

che muta la curva u nella retta $Y = 0$ e la curva v nell'intorno del punto improprio dell'asse Y.

A norma del Lemma sopra enunciato si danno ora due possibilità per il modo di agire della T sulle due curve u e v, e precisamente:

a) ognuna delle due curve u e v è invariante per T

oppure:

b) la T scambia tra loro le curve u e v.

Discutiamo separatamente le due ipotesi:

a) anzitutto poniamo che ognuna delle due curve u e v sia invariante per T. Si ha allora che la trasformazione:

$$\overline{T} = \Theta^{-1}\, T\, \Theta$$

trasformata di T mediante la Θ, ha la retta $Y = 0$ come retta unita e pertanto ammette la forma analitica seguente:

$$(3) \qquad \begin{cases} X_1 = \eta\, X_0 \\ Y_1 = \vartheta\, Y_0 \end{cases}$$

dove ϑ indica una radice n-esima dell'unità tale che ϑ^s sia una radice ν-esima primitiva dell'unità.

Infatti a priori ϑ è una funzione razionale di X_0, che ammette quindi una espressione del tipo:

$$(4) \qquad \vartheta(X_0) = \frac{a_0 + a_1 X_0 + \ldots + a_r X_0^r}{b_0 + b_1 X_0 + b_2 X_0^2 + \ldots + b_r X_0^r}\,.$$

Ma ricordando che la $\overline{T}^s$ deve avere la forma analitica:

$$(5) \qquad \overline{T}^s \equiv \begin{cases} X_s = X_0 \\ Y_1 = \varepsilon\, Y_0 \end{cases}$$

trovata sopra al § 2, si deduce che deve essere:

(6) $$\vartheta(X_0) \,.\, \vartheta(\eta X_0) \,.\, \vartheta(\eta^2 X_0) \ldots \vartheta(\eta^{s-1} X_0) = \varepsilon$$

e di qui, con facile verifica, si ha che nella espressione di ϑ data dalla (4) deve essere:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_s = b_1 = b_2 \ldots = 0.$$

Si ha dunque che ϑ è una costante e, ancora dalla (6), che deve essere $\vartheta^s = \varepsilon$.

b) Supponiamo in secondo luogo che la T scambi tra loro le curve u e v; allora la trasformazione $\overline{T} = \Theta^{-1} T \Theta$ ammette la forma analitica seguente:

$$\begin{cases} Y_1 = \eta X_0 \\ Y_1 = K(X_0)/Y_0 \end{cases}$$

dove $K(X_0)$ è una funzione razionale del suo argomento.

Teniamo ora conto che, avendosi $n/s > 2$, la $\overline{T}^s$ deve avere la forma (5), e consideriamo la trasformaztone $\overline{T}' = \overline{T}\ {}^1\, \overline{T}^s\, \overline{T}$ trasformata della $\overline{T}^s$ mediante la $\overline{T}$; questa è ovviamente coincidente con $\overline{T}^s$ e d'altra parte, a calcoli eseguiti, essa risulta della forma:

$$\overline{T}' \equiv \begin{cases} x' = x_0 \\ y' = y_0/\varepsilon. \end{cases}$$

Perchè sia $\overline{T}' = \overline{T}^s$ deve quindi essere $\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon}$; il che è possibile soltanto se ε è radice quadrata dell'unità, contro l'ipotesi in cui ci siamo posti, che sia maggiore di due il periodo $\nu = n/s$ della trasformazione T.

Ne concludiamo che è possibile soltanto il caso contemplato nella ipotesi a); pertanto la T risulta cremonianamente equivalente alla omografia:

(7) $$\begin{cases} X_1 = \eta X_0 \\ Y_1 = \vartheta Y_0. \end{cases}$$

Ora esistono certo due numeri m ed m' primi tra loro, tali che sia:

$$\vartheta^m = \eta^{m'}$$

ed eliminando ϑ ed η tra questa equazione e la (7) si ottiene:

$$\frac{Y_1^{m}}{X_1^{m'}} = \frac{Y_0^{m}}{X_0^{m'}}.$$

Del sussistere di questa equazione si deduce che ogni curva del fascio:

$$Y^{m} = \lambda X^{m'} \tag{8}$$

è invariante per la T e quindi per l'intero gruppo generato da essa.

Ora le curve del fascio (8) sono chiaramente razionali e perciò trasformabili nelle rette di un fascio mediante una trasformazione cremoniana H; pertanto la trasformazione $\Theta \cdot$ H muterà la T in una trasformazione avente un fascio di rette unite. Quindi, a conclusione dell'analisi svolta nel presente paragrafo possiamo enunciare il:

Teorema IV. - Se una trasformazione T di Jonquières ciclica di periodo n subordina nel fascio invariante di rette una proiettività di periodo s tale che $n/s > 2$, essa è birazionalmente equivalente ad una trasformazione di Jonquières che ammette un fascio di rette unite

§ 5. - Sia infine $\nu = 2$, cioè sia T una trasformazione ciclica di Jonquières di periodo n che subordina sul fascio invariante S di rette una priettività ciclica σ di periodo s, con $n = 2s$.

È ovvio che si possono ottenere trasformazioni soddisfacenti a queste condizioni assumendo dei casi particolari opportuni delle trasformazioni studiate al paragrafo precedente. Esistono tuttavia, come vedremo subito, delle trasformazioni che non si possono ottenere in questo modo.

Per dimostrarlo consideriamo anche in questo caso la trasformazione T^s; essa è involutoria, avendo periodo 2, e verrà da noi indicata con $\mathfrak{J}$, avendosi quindi:

$$\mathfrak{J} = T^s$$

con $\mathfrak{J}^2 = 1$.

Supponiamo ora che la $\mathfrak{J}$ possegga una curva di punti uniti φ iperellittica irriducibile. Potremo sempre pensare di aver operato una trasformazione cremoniana tale che la φ sia rapprentata da una equazione:

$$\varphi \equiv \{y^2 = F(x)\}$$

dove il polinomio F possiede radici tutte semplici ed ha l'unità come coefficiente del termine di massimo grado in x.

Di conseguenza la $\mathfrak{I}$ avrà le equazioni:

$$\mathfrak{I} \equiv \begin{cases} x_s = x_0 \\ y_s = F(x_0)/y_0. \end{cases} \tag{9}$$

Sia ora P_0 un punto generico della curva φ e quindi un punto unito per la $\mathfrak{I}$; esso avrà coordinate x_0 ed $y_0 = \sqrt{F(x_0)}$.

Poichè anche in questo caso ovviamente la $\mathfrak{I}$ è invariante per T, il punto P_1 corrispondente di P_0 in T apparterrà alla curva φ e quindi avrà coordinate $x_1 = \eta x_0$; $y_1 = \sqrt{F(x_1)}$, essendo $\sqrt{F(x_1)} = \sqrt{F(\eta x_0)}$ un ben determinato valore della funzione algebrica $\sqrt{F(x_1)}$.

Ora questo valore deve dipendere solamente da x_0 ed y_0 e di conseguenza, ogni volta che x_0 descrive sul piano della variabile complessa x un cammino diramante per la funzione $\sqrt{F(x_0)}$, lo stesso deve avvenire per $x_1 = \eta x_0$.

Possiamo quindi enunciare il seguente

LEMMA. - Il gruppo delle radici del polinomio $F(x)$ è mutato in sè dalla proiettività σ ciclica di ordine s, di equazione $x_1 = \eta x_0$.

Tenuto conto delle proprietà del polinomio $F(x)$ (radici tutte semplici, coefficiente del termine di massimo grado in x uguale all'unità) deduciamo che si possono presentare per il polinomio $F(x)$ due soli casi:

a) è $F(x) = (x^s - a_1)(x^s - a_2) \dots (x^s - a_r)$;

con i numeri $a_1, a_2, \dots a_r$ tutti diversi tra loro, oppure:

b) è $F(x) = x$.

Discutiamo separatamente le due ipotesi. Consideriamo anzitutto il caso a) in cui è:

$$F(x) = (x^s - a_1)(x^s - a_2) \dots (x^s - a_r)$$

e di conseguenza si ha:

$$F(\eta x_0) = F(x_0).$$

In base a quanto precede possiamo asserire che la T deve avere la espressione seguente:

$$T \equiv \begin{cases} x_1 = \eta x_0 \\ y_1 = F(x_0)/y_0 \end{cases}$$

Inoltre per le coordinate di un punto $P_r (0 < r \leq n)$ apparnente al ciclo definito da P_0 si hanno le espressioni:

$$\begin{cases} x_2 = \eta^r x_0 \\ y_2 = F(x_0)/y_0 \end{cases} \quad \text{se } r \text{ è dispari}$$

$$\begin{cases} x_r = \eta^r x_0 \\ y_r = y_0 \end{cases} \quad \text{se } r \text{ è pari.}$$

Pertanto, poichè T^s deve avere la forma (9), ne concludiamo che deve essere s un numero dispari.

Consideriamo ora il caso b), cioè supponiamo che sia in particolare $F(x) = x$. La $\mathfrak{J}$ acquista ora la forma:

$$\mathfrak{J} \equiv \begin{cases} x_s = x_0 \\ y_s = x_0/y_0 \end{cases} \tag{10}$$

e la T, invariante per $\mathfrak{J}$, ha la forma:

$$T \equiv \begin{cases} x_1 = \eta\, x_0 \\ y_1 = \eta^{1/2}\, x_0/y_0 \,. \end{cases}$$

Per le coordinate di un punto P_r $(0 < r \leq n)$ appartenente al ciclo definito da P_0 si hanno ora le espressioni:

$$\begin{cases} x_r = \eta^2 x_0 \\ y_r = \eta^{r/2} y_0 \end{cases}$$

se r è pari e:

$$\begin{cases} x_r = \eta^2 x_0 \\ y_r = \eta^{r/2} x_0/y_0 \end{cases}$$

se r è dispari.

Di conseguenza, dovendo la $\mathfrak{J} = T^s$ avere la forma (10), deve essere s un numero dispari ed $\eta^{s/2} = 1$; dal che si deduce che questo secondo caso non può presentarsi.

Possiamo dunque concludere quanto è stato detto fin qui enunciando il

TEOREMA V. - Una trasformazione T di Jonquières, ciclica di periodo $n = 2s$, che subordina sul fascio invariante di rette una proiettività ciclica σ di periodo s e tale che T^s abbia una curva di punti uniti iperellittica ed irriducibile deve avere s dispari ed è birazionalmente equivalente alla trasformazione:

$$\begin{cases} x_1 = \eta x_0 \\ y_1 = F(x_0)/y_0 \end{cases} \tag{11}$$

dove η è una radice s-esima primitiva dell'unità, ed $F(x)$ è un polinomio invariante per la trasformazione $x_1 = \eta x_0$.

§ 6. - Ricerchiamo ora infine se la trasformazione T, nominata nel teorema enunciato poco fa e definita dalle equazioni (11), sia birazionalmente equivalente alle precedenti, cioè se essa possa venire mutata cremonianamente in una trasformazione di Jonquières avente un fascio di rette unite.

Vedremo che ciò non può accadere se la curva di equazione:

$$y^2 = \mathrm{F}(x) \tag{12}$$

che è curva di punti uniti per la trasformazione $\mathfrak{I} = \mathrm{T}^s$, è di genere maggiore di zero.

Supponiamo dunque che sia data una trasformazione T di equazioni:

$$\mathrm{T} \equiv \begin{cases} x_1 = \eta x_0 \\ y_1 = \mathrm{F}(x_0)/y_0 \end{cases}$$

in cui η è una radice s-esima primitiva dell'unità, s è un numero ovviamente maggiore di uno ed essenzialmente dispari, il polinomio $\mathrm{F}(x)$ è invariante per la proiettività $x' = \eta x$, ed infine la curva (12) ha genere maggiore di zero.

Dimostriamo che la T non è birazionalmente equivalente ad una trasformazione di Jonquières avente un fascio di rette unite. Infatti perchè ciò accada è necessario che esista (almeno) un fascio di curve K razionali, non composte di rette del fascio $x =$ cost. ed invarianti per la T.

Ora consideriamo un piano Π su cui sono definite certe coordinate X, Y legate alle x, y delle equazioni:

$$\begin{cases} \mathrm{X} = x \\ \mathrm{Y} = y + \mathrm{F}(x)/y. \end{cases} \tag{13}$$

Manifestamente le (13) definiscono una trasformazione razionale di indici [1, 2] tra i punti del piano Π ed i punti del piano π su cui sono date le coordinate x, y.

Per questa trasformazione la curva φ del piano Π avente equazione:

$$\varphi \equiv \{\mathrm{Y}^2 = 4\mathrm{F}(\mathrm{X})\}.$$

è di diramazione; tale curva φ ha ovviamente lo stesso genere della curva (12).

Ora si verifica immediatamente che la trasformazione (13) muta un gruppo di $n = 2s$ punti del piano π formanti un ciclo per la T in un gruppo di s punti del piano Π formanti un ciclo per la trasformazione T_1 data dalle equazioni:

$$(14) \qquad T_1 \equiv \begin{cases} X_1 = \eta X \\ Y_1 = Y_0 \end{cases}$$

Sia ora K una curva del piano π razionale ed invariante per la trasformazione T; ad essa le (13) fanno corrispondere una curva Ψ del piano Π pure razionale ed invariante per la trasformazione T_1, cioè una curva Ψ la cui equazione può essere scritta nella forma:

$$\Psi(X^s, Y) = 0.$$

Poichè abbiamo escluso che la curva K sia composta con rette del fascio $x =$ cost. potremo assicurare che le rette del fascio $X =$ cost. secano sulla Ψ una g^1_μ (con $\mu > 0$) la quale avrà pertanto $2\mu - 2$ punti di diramazione.

A questa g^1_μ corrisponderà su K una $g^1_{2\mu}$ la quale, per la razionalità della K, avrà $4\mu - 2$ punti di diramazione. È noto che questi possono provenire a coppie dalle diramazioni della g^1_μ di Ψ ed inoltre dalle eventuali δ intersezioni di molteplicità dispari tra i rami della curva φ di Π ed i rami della Ψ.

Deve essere pertanto,

$$4\mu - 2 = 2(2\mu - 2) + \delta$$

da cui si trae che deve essere necessariamente $\delta = 2$.

Poniamo ora che K varii in un fascio; lo stesso avverrà dunque della curva Ψ, la cui equazione potrà essere scritta nella forma:

$$(15) \qquad \Psi = \Psi_1 + \lambda \Psi_2 = 0.$$

Possono ora presentarsl due ipotesi: o le curve del fascio (15) non hanno intersezioni variablii con la con la curva φ, oppure esse secano su di essa una g^1_ϱ con $\varrho > 0$. Nella prima ipotesi dovrà esistere un valore $\bar{\lambda}$ del parametro λ del fascio (15) per il quale la curva Ψ corrispondente contiene la curva φ; ma ciò è impossibile perchè tutte le curve del fascio (15) sono state supposte razionali e di conseguenza non può una curva particolare dello stesso fascio contenere la φ che è stata supposta di genere maggiore di zero.

Poniamoci ora nella seconda ipotesi, cioè poniamo che le curve del fascio (15) sechino sulla φ una g^1_ϱ con $\varrho > 0$. I punti di un gruppo generico di tale g^1_ϱ sono allora tutti semplici;

inoltre, essendo la φ e la Ψ invarianti per la trasformazione T_1 data dalle (14), dovrà essere ϱ multiplo di s; ma ricordiamo d'altra parte che ogni intersezione semplice dei rami di φ con i rami di una Ψ corrisponde ad una diramazione della $g^1{}_{2\mu}$ secata sulle curve K dalle rette del fascio $x = \text{cost.}$, e che le diramazioni di questo tipo sono due, come è stato dimostrato poco sopra. Anche la seconda ipotesi dunque non accettabile. Pertanto, a conclusione di tutta l'analisi svolta fin qui, potremo enunciare il

Teorema VI. - Si dànno due tipi di trasformazioni cicliche di Jonquières birazionalmente distinti:

ad un tipo appartiene ogni trasformazione T di periodo n che subordina sul fascio invariante di rette una proiettività di periodo s (essenzialmente dispari) tale che sia $n/s = 2$ e che la T^s ammetta una curva di punti uniti iperellittica irriducibile di genere maggiore di zero;

all'altro tipo appartiene ogni altra trasformazione ciclica di Jonquières. Tutte le trasformazioni di questo secondo tipo sono birazionalmente equivalenti a trasformazioni cicliche di Jonquières aventi un fascio di rette unite.

Estratto dai *Rendiconti* dell'Istituto Lombardo di scienze e lettere
Vol. LXXXVII, 18° della serie III, Fasc. 1.

Pavia — Premiata Tipografia Successori Fusi — 1954