

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE. L'opera *I fondamenti della geometria*, di David Hilbert, ha avuto sette edizioni durante la vita dell'autore, nel corso di un trentennio (dal 1900, data della prima edizione, al 1930); altre due edizioni, a cura di P. Bernays, sono state fatte dopo la morte di Hilbert. Nelle successive edizioni comparse durante la vita di Hilbert il nucleo originale dell'opera, riguardante la GEOMETRIA, ricevette pochi ritocchi; vennero tuttavia aggiunte a questo nucleo, di volta in volta, varie appendici che trattano dei contributi che Hilbert apportava ai problemi riguardanti la logica, i fondamenti della matematica e quelli della geometria. Nella parte dell'opera che ne costituisce il nucleo essenziale Hilbert dà una trattazione dei fondamenti della geometria che in certo modo concilia le esigenze di discostarsi il meno possibile dalla trattazione euclidea e di tenere conto dei risultati e dei progressi nel campo della logica, dei fondamenti della matematica in generale e della geometria in particolare. A questo sforzo di conciliare le due opposte esigenze di cui abbiamo detto si deve forse anche la fortuna dell'opera di Hilbert: esistono infatti delle trattazioni dei fondamenti della geometria che sono contemporanee o quasi alle prime edizioni dell'opera di Hilbert e che sono forse formalmente più rigorose di questa; ricordiamo per esempio le trattazioni dovute a M. Pieri e a Beppo Levi, che usano metodicamente il simbolismo della logica di G. Peano. Tuttavia queste trattazioni si discostano notevolmente da quella euclidea e forse contrastavano troppo vivacemente con la mentalità matematica corrente all'epoca in cui comparvero.

Hilbert enuncia cinque gruppi di assiomi che egli chiama rispettivamente: assiomi di appartenenza, assiomi di ordinamento, assiomi di congruenza, assioma delle parallele, assiomi di Archimede e di continuità.

Ad esempio, per quanto riguarda il primo gruppo, Hilbert enuncia otto assiomi.

1) Dati due punti A e B , esiste una retta che contiene entrambi i punti.

2) Dati due punti A e B non esiste più di una retta che contiene entrambi i punti.

3) Su una retta stanno almeno due punti. Esistono almeno tre punti che non appartengono alla medesima retta.

4) Dati tre punti qualunque A , B , C che non appartengono a una medesima retta, esiste un piano α che passa per essi. Dato un piano qualunque, esiste un punto che sta su esso.

5) Dati tre punti qualunque A , B , C che

non appartengono a una stessa retta, non esiste piú di un piano che passa per essi.

6) Se due punti A e B di una retta a stanno su un piano α , allora ogni punto di a sta sul piano.

7) Se due piani α e β hanno in comune un punto A , allora essi hanno in comune anche almeno un altro punto B .

8) Esistono almeno quattro punti che non appartengono a un medesimo piano.

Gli assiomi del secondo gruppo mirano a stabilire il significato della frase: 'un punto A di una retta a sta fra due punti B e C , pure di a '. Gli assiomi del terzo gruppo stabiliscono il concetto di congruenza tra segmenti e tra angoli; sulla base di essi vengono dimostrati i cosiddetti 'criteri di uguaglianza dei triangoli' che appaiono nelle abituali trattazioni elementari.

Il quarto gruppo di assiomi contiene soltanto l'assioma che afferma l'unicità della retta appartenente a un piano che passi per un punto e che sia parallela a una retta del piano stesso.

Il quinto gruppo contiene due assiomi: il cosiddetto assioma di Eudosso-Archimede (il quale afferma in sostanza che, dati due segmenti, il primo minore del secondo, esiste sempre un multiplo del primo segmento che è maggiore del secondo) e il cosiddetto assioma della continuità, che Hilbert enuncia affermando che l'insieme degli enti che egli ha presentato è il piú vasto insieme che soddisfa agli assiomi precedentemente enunciati.

Dopo gli assiomi di ogni gruppo Hilbert dà la constatazione della loro compatibilità e della loro indipendenza; tale constatazione è sostanzialmente conseguita assegnando ogni volta dei modelli, costruiti con enti presi da altri campi della matematica, che realizzano gli assiomi enunciati. Così, ad esempio, per gli assiomi di appartenenza, Hilbert considera un campo numerico, chiama 'punto' una terna di numeri appartenenti al campo, chiama 'piano' l'insieme dei punti corrispondenti a terne di numeri che soddisfano una equazione di primo grado e attribuisce alla frase 'un punto appartiene a un piano' il significato convenzionale seguente: 'la terna di numeri che corrisponde al punto soddisfa all'equazione di primo grado che corrisponde al piano'. Analogamente Hilbert chiama 'retta' l'insieme dei punti che appartengono a due piani, ecc. Allora la constatazione della compatibilità degli assiomi del primo gruppo viene ricondotta alla constatazione della validità delle proprietà formali delle operazioni sui numeri del campo numerico considerato (per esempio il campo razionale, il campo reale oppure il campo complesso) e alla validità della teoria dei sistemi di equazioni lineari.

Si intuisce di qui la caratteristica essenziale per la quale l'impostazione hilbertiana differisce dall'impostazione classica euclidea della geometria; invero Hilbert non dà la

definizione degli enti di cui la geometria tratta, almeno se all'espressione 'definizione' vogliamo conservare il significato classico; invece gli enti della geometria vengono definiti in modo implicito, attraverso gli assiomi che essi devono soddisfare.

Pertanto, di contro alla prima frase degli *Elementi* di Euclide, « Il punto è ciò che non ha parte », che viene considerata da molti commentatori e dai matematici di vari secoli come una specie di definizione nel senso classico, abbiamo la prima frase dell'opera di Hilbert, « *Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen* » ('Pensiamo tre distinti insiemi di enti (cose)'), senza dare di queste 'cose' una definizione esplicita. La definizione scaturirà implicitamente dal seguito del discorso e dagli assiomi che verranno enunciati.

Questo atteggiamento è consono anche alla impostazione che Hilbert aveva dato al problema della 'esistenza' degli enti della matematica; tale problema era stato da lui risolto con il richiedere che tali enti soltanto dovessero soddisfare condizioni logicamente consistenti fra loro e cioè fossero tali che le loro definizioni si presentassero come non contraddittorie.

Nelle successive edizioni dell'opera la discussione sui principi della geometria viene portata avanti con il precisare vari tipi di quelle che vengono chiamate da qualche autore le 'geometrie non'; esse costituiscono degli insiemi di teoremi i quali si fondano su proposizioni iniziali (assiomi) che non coincidono con tutti gli assiomi che fondano (più o meno esplicitamente) la geometria tradizionale: quindi tali sistemi di proposizioni vengono chiamati di volta in volta 'geometrie non archimedee' oppure, per esempio, 'geometrie non arguesiane' a seconda che rispettivamente tra gli assiomi manchi l'assioma detto di Archimede oppure quello che fonda il classico teorema detto di Desargues.

Nella sua trattazione Hilbert indaga anche i collegamenti che sussistono fra tali 'geometrie non' e le varie strutture algebriche; invero egli costruisce vari calcoli di segmenti e mostra che in corrispondenza delle varie 'geometrie non' tali calcoli posseggono delle proprietà formali che non coincidono completamente con le proprietà formali delle operazioni dell'algebra dei numeri reali.