DIDATTICA DELLE SCIENZE

Numero 73 del gennaio 1978

Sommario

4 MAURO LAENG, Voti e schede

6 DARIO ANTISERI, L'« invenzione » dell'America - Problemi, congetture, prove ed errori

11 CESARE CURRADO, Etologia: comunicazione e segnali

14 CARLO FELICE MANARA, Grandezze e misure. 2 - Esperienze e proposte di didattica matematica 7

17 GIAN LUIGI SPADA - ANNA MARIA BENINI SPADA, L'insegnamento dell'algebra

21 GIAMPIERO SBRIGHI, Prove oggettive di profitto - La rappresentazione grafica

29 EUGENIO STOCCHI, Bicentenario della nascita di Carlo Federico Gauss

30 Notiziario

Fascicolo di 32 pagine più inserto redazionale

Inserto

Ambiente: struttura, dinamica, evoluzione: è l'argomento dell'inserto di questo e dei prossimi numeri della rivista. Alla sua attualità fa riscontro una trattazione rigorosa e chiara, esauriente sia per il contenuto del testo che per il corredo iconografico, che, pur nella ristrettezza dello spazio, offre certamente un valido contributo tanto per un primo approccio quanto per una più approfondita ricerca nel campo dell'ecologia.

In copertina

Paesaggio agricolo nell'Italia Centrale. *(Fotocolor Aetas)*

DIDATTICA DELLE SCIENZE

Numero 73 del gennaio 1978

Sommario

4 MAURO LAENG, Voti e schede

6 DARIO ANTISERI, L'« invenzione » dell'America - Problemi, congetture, prove ed errori

11 CESARE CURRADO, Etologia: comunicazione e segnali

14 CARLO FELICE MANARA, Grandezze e misure. 2 - Esperienze e proposte di didattica matematica 7

17 GIAN LUIGI SPADA - ANNA MARIA BENINI SPADA, L'insegnamento dell'algebra

21 GIAMPIERO SBRIGHI, Prove oggettive di profitto - La rappresentazione grafica

29 EUGENIO STOCCHI, Bicentenario della nascita di Carlo Federico Gauss

30 Notiziario

Fascicolo di 32 pagine più inserto redazionale

Inserto

Ambiente: struttura, dinamica, evoluzione: è l'argomento dell'inserto di questo e dei prossimi numeri della rivista. Alla sua attualità fa riscontro una trattazione rigorosa e chiara, esauriente sia per il contenuto del testo che per il corredo iconografico, che, pur nella ristrettezza dello spazio, offre certamente un valido contributo tanto per un primo approccio quanto per una più approfondita ricerca nel campo dell'ecologia.

In copertina

Paesaggio agricolo nell'Italia Centrale. *(Fotocolor Aetas)*

Carlo Felice Manara

GRANDEZZE E MISURE. 2

Esperienze e proposte di didattica matematica. 7

4. Gli elementi di un insieme A che soddisfano alle condizioni che abbiamo esposto nel paragrafo precedente vengono abitualmente chiamati *grandezze omogenee* e l'insieme A viene chiamato conseguentemente una classe di grandezze omogenee. Nel § 3 abbiamo messo a fondamento di questa definizione la possibilità di eseguire, nella classe, una operazione di composizione con le proprietà formali date dalle (6) e (7) del § 3 e l'esistenza di un elemento neutro. Da qui abbiamo dedotto la possibilità di stabilire una relazione di ordine nell'insieme. Non è tuttavia ancora sufficiente ciò che abbiamo detto per giungere all'analisi completa del concetto abituale; a tal fine occorre enunciare due altre proposizioni che sono abitualmente date per evidenti nella pratica abituale.

La prima proposizione afferma che l'ordinamento istituito nel paragrafo precedente è un ordinamento *totale* nell'insieme.

In altre parole ciò significa che, date due grandezze a e b dell'insieme della classe A deve sempre sussistere una almeno delle tre relazioni

(1) $$a = b;\ a \leq b;\ a \geq b$$

e che si ha

(2) se $a \geq b$ ed anche $b \geq a$ allora è $a = b$.

La seconda delle proposizioni che abbiamo in mente viene chiamata abitualmente « Postulato di Archimede »: questa proposizione può essere enunciata nei termini abituali dicendo che

« Date due grandezze a e b della classe A, se è

$$a \leq b$$

esiste un intero n tale che sia

$$b \leq n\,a».$$

Le grandezze che vengono abitualmente considerate nella pratica sono archimedee, ma non è detto che questa proprietà sia "naturale" o consegua necessariamente dalle premesse.

Gli esempi di classi di grandezze non archimedee che vengono dati nella matematica possono essere giudicati forse un po' artificiali; ma è ben noto che anche la fisica ci offre degli esempi di grandezze dello stesso tipo. Basti ricordare che la Relatività ristretta ci presenta una legge di composizione delle velocità che fa di queste grandezze una classe non archimedea. Invero, indicata con c la velocità della luce nel vuoto, si ha che la legge di composizione delle velocità esprime la velocità composta di due altre, u e v (che supporremo parallele, per semplicità), nella forma:

$$(u + v) \,/\, (1 + uv : c^2)$$

Questa legge soddisfa alle proprietà commutativa ed associativa, ma in base ad essa si ha che, partendo da velocità u, v minori di c, non si arriva mai a superare c, la quale si presenta quindi come un elemento limite superiore, insuperabile mediante composizione successiva, contro il postulato di Archimede.

5. Ciò che abbiamo esposto fin qui non è ancora sufficiente per poter iniziare l'esposizione del procedimento di misura, che associa ad ogni grandezza della classe A un numero, con determinate convenzioni che vedremo. Occorre invero enunciare delle condizioni sufficienti a garantire l'esistenza di un elemento che sia un "sottomultiplo" di un elemento qualesivoglia secondo un intero qualunque n; in altre parole, dati comunque l'elemento a e l'intero naturale n, occorre garantire che esiste un elemento b tale che si abbia

(1) $$a = nb$$

Questa esistenza viene considerata evidente nella pratica abituale, ma non consegue affatto dalle premesse finora esposte, come è ben noto. Pertanto occorre postularla esplicitamente oppure enunciare il postulato della continuità nella classe di grandezze, da cui l'esistenza del sottomultiplo consegue logicamente. Non possiamo qui sviluppare tutta la teoria e rimandiamo per una trattazione esauriente della questione per esempio all'articolo di G. Vitali dal titolo *Sulle applicazioni del postulato della continuità nella Geometria elementare* che si trova in « *Questioni riguardanti le matematiche elementari* » raccolte da F. Enriques - Vol. I - art. V.

Le proprietà che abbiamo supposte valide per la classe di grandezze omogenee A che stiamo considerando permettono ora di analizzare l'operazione che viene chiamata "misura" delle grandezze di A. Questa operazione consiste sostanzialmente nella procedura seguente: si sceglie una grandezza $u \in A$ che verrà chiamata "unità di misura"; è possibile allora determinare, in corrispondenza ad ogni elemento $a \in A$ un numero razionale o una successione convergente di numeri razionali (numero reale) che corrisponde in modo biunivoco alla coppia di grandezze u ed a. Non stiamo a descrivere questa procedura che è ben nota; ci limitiamo a ricordare che essa è resa possibile dal fatto che esiste una grandezza w che è sottomultipla di u secondo un intero naturale n qualesivoglia e dal fatto che è possibile confrontare a con i multipli di w in modo che esiste sempre un intero naturale m tale che sia

$$mw \leq a < (m + 1)\, w$$

Viceversa la continuità delle grandezze della classe A permette di dimostrare anche che la corrispondenza tra grandezze e numeri è biunivoca; in altre parole si ha che fissata l'unità di misura ed un numero razionale, o una successione convergente di numeri razionali, esiste una ed una sola grandezza $a \in A$ che ha come misura quel numero razionale o quella successione convergente di numeri razionali.

Si ha quindi una tecnica per stabilire una corrispondenza biunivoca tra grandezze e numeri e di conseguenza i numeri possono essere considerati come delle coordinate degli elementi della classe A, secondo quanto è stato detto nel § 2. Tuttavia la tecnica con la quale la corrispondenza è stata stabilita permette di ricavare ulteriori informazioni da queste coordinate: infatti, a partire dall'operazione di misura che è stata descritta poco fa, si dimostra facilmente che all'operazione di composizione di due grandezze della classe corrisponde una grandezza che ha come misura la somma dei numeri che misurano le grandezze componenti.

Pertanto l'operazione di misura stabilisce un isomorfismo tra grandezze e numeri reali positivi nel senso che la corrispondenza biunivoca conserva le operazioni di composizione nelle due classi di enti che si corrispondono.

È del tutto ovvio da quanto precede che la corrispondenza dipende essenzialmente dalla scelta della grandezza che si è fissata come unità di misura e che tale scelta è completamente libera, e di conseguenza può essere oggetto soltanto di convenzioni e non può essere imposta.

Ciò vale — a nostro parere — anche quando nella classe di grandezze considerata esista una grandezza privilegiata, come avviene per esempio per gli angoli, fra i quali esiste l'angolo giro, che ammette una definizione indipendente dall'unità di misura e quindi potrebbe essere assunto come " unità naturale "; la stessa cosa potrebbe essere detta a proposito dell'unità di lunghezza in una superficie a curvatura gaussiana costante positiva: su questa la lunghezza della geodetica potrebbe essere considerata come l' " unità naturale di lunghezza "; si potrebbe pensare che un ragionamento come questo abbia fornito l'idea agli scienziati che hanno scelto come unità di misura delle lunghezze il metro credendo di poterlo definire in modo stabile come $25 \cdot 10^{-9}$ la geodetica della Terra supposta sferica.

La tecnica che abbiamo analizzata permette tuttavia di concludere che la scelta di una unità di misura diversa dalla precedente non altera le proprietà che abbiamo messe in luce: semplicemente ogni misura è moltiplicata per un numero costante k che rappresenta la misura della " vecchia " unità presa nella " nuova " unità.

6. Ciò che abbiamo detto fin qui è sufficiente per una trattazione teorica astratta delle grandezze, almeno a quel livello elementare al quale noi ci siamo posti; tuttavia vale la pena di proseguire l'analisi per quanto concerne la scelta delle unità di misura e quindi per quanto concerne le conseguenze pratiche delle convenzioni stabilite ed accettate.

Supponiamo infatti che in qualche parte del mondo esista un reame nel quale la volontà del re è legge non soltanto per quanto concerne la politica ma anche per quanto concerne la tecnica; nulla vieta che in questo reame il re possa imporre che l'unità di lunghezza sia quella del suo braccio, che l'unità di superficie sia l'area della tavola rotonda alla quale egli si asside con i suoi Pari, che l'unità di volume sia la capacità del boccale di birra preferito da Sua Maestà.

In questo reame, se il re cambiasse il raggio della tavola rotonda senza cambiare il boccale, cambierebbero le misure delle aree senza che cambino le misure delle lunghezze e dei volumi. La cosa, per quanto scomoda, non sarebbe tuttavia contraddittoria, perché si tratta di classi di grandezze del tutto diverse; e anche nel nostro mondo razionalizzato non cambierebbe il numero di Mach che misura la velocità di un aereo rispetto all'aria qualora cambiassero le unità di lunghezza e di tempo.

In quel reame i regi matematici di Corte avrebbero molto lavoro per dare la misura dell'area del grande salone da ballo rettangolare della reggia; ma ci arriverebbero di sicuro utilizzando i teoremi di geometria piana secondo i quali si ha che:

I) le aree di due cerchi stanno tra loro come i quadrati dei raggi;

II) le aree di due rettangoli che hanno un lato in comune stanno tra loro come i restanti lati.

Certo se la graziosa maestà si lasciasse convincere a scegliere come unità di misura delle aree l'area del quadrato costruito avendo come lato l'unità di misura delle lunghezze (cioè la lunghezza del suo braccio) si avrebbe che: il numero che dà la misura in braccia quadrate dell'area della grande sala da ballo si otterrebbe semplicemente dal prodotto dei due numeri che dànno le misure in braccia dei lati della sala. Ma i regi matematici non oseranno mai dire che il re è obbligato dalla logica o dalla geometria a fare una scelta; perché — ripetiamo ancora — di una scelta, di una decisione si tratta e non di una necessità logica. Ed è pure sperabile che i regi matematici non confonderanno mai due grandezze diverse per il solo fatto che le unità di misura sono state scelte in modo che le misure siano rappresentate dallo stesso numero, così come avviene invece negli esempi riportati qui sopra al § 1; confusione deplorevole alla quale sarebbero indotti i sudditi del reame di cui si tratta se i regi matematici indulgessero in frasi come a noi capita spesso di udire, del tipo di questa: « L'area di un rettangolo è il prodotto della base per l'altezza ».

Se poi la graziosa maestà si compiacesse di cambiare l'unità di misura delle lunghezze, prendendo il proprio palmo invece del proprio braccio, ma conservasse sempre la decisione di assumere come unità di misura delle aree quella del quadrato costruito sulla unità di misura delle lunghezze, i regi matematici potrebbero limitarsi a moltiplicare ogni misura di lunghezza per un numero fisso, ed ogni misura di area per il quadrato dello stesso numero fisso.

Ma — ripetiamo ancora una volta — si tratta sempre di una scelta, di una decisione, non di una conseguenza logica dei teoremi della matematica.

Questo banale apologo vorrebbe cercare di chiarire quale sia il significato delle unità di misura delle grandezze che vengono oggi chiamate " derivate ": in teoria sarebbe possibile scegliere una unità per ciascuna delle grandezze che occorre misurare, ma in pratica è comodo scegliere delle unità di misura che siano costruite in modo noto sulle unità di certe grandezze che vengono chiamate " fondamentali " perché in questo caso le misure delle grandezze nelle unità derivate si ottengono con operazioni aritmetiche comode e sicure sulle misure di certe grandezze. In modo analogo, quando si cambino le unità di misura delle grandezze prese come fondamentali, le misure di tutte le altre rispetto alle nuove unità si ottengono in modo semplice con operazioni ben determinate.

7. Le questioni di cui abbiamo trattato fin qui investono anche l'insegnamento della matematica a livello elementare, come abbiamo cercato di mostrare con gli esempi presentati nel § 1; in particolare i problemi relativi ai prezzi ed ai pesi specifici, che sono spesso occasioni di equivoci e confusioni.

Non intendiamo qui dare dei precetti per la trattazione didattica degli argomenti, perché non vogliamo aver l'aria di presentare come soluzioni logicamente necessarie delle decisioni che dipendono spesso soltanto da convenzioni, abitudini, decisioni e scelte libere. Il lettore a cui interessassero trattazioni della teoria e della pratica didattica può consultare i grandi maestri che si sono occupati in modo esauriente dell'argomento[1]; la sola raccomandazione che osiamo fare è quella di non ingenerare delle confusioni nella testa degli allievi, imponendo come procedimenti obbligati quelle che sono pure scelte di comodo. A questo argomento si riattacca la questione delle « marche » di cui trattano esplicitamente L. Brusotti e G. Giorgi negli articoli citati nella nota 2. Anche in questo campo non oseremmo raccomandare un modo di scrittura piuttosto che un altro, e dire per esempio che sia opportuno scrivere sempre « $\dfrac{m}{sec}$ » invece che « *m/sec* »; tra l'altro G. Giorgi, che è stato un personaggio di indiscussa autorità in materia, dice esplicitamente che la cosa è del tutto indifferente; quindi pensiamo che il volere obbligare ad una delle scritture a preferenza dell'altra costituirebbe una imposizione di precetti inutili in un argomento che già offre delle difficoltà al discente.

Naturalmente è giusto pensare che, dal momento che esistono delle convenzioni internazionali per utilizzare questi simboli, tanto vale insegnare agli allievi a rispettarle. Ma, a parere di chi scrive, la cosa più importante è di evitare dei procedimenti che inducano gli allievi a dei giudizi errati sulla natura di certi numeri, ed in particolare ad illudersi che certi numeri siano privi di dimensioni quando invece ciò non è. Pertanto pensiamo che sia bene insistere sulla distinzione tra teoremi e convenzioni.

Le convenzioni infatti possono essere utili, o comode, e anche di conseguenza molto ragionevoli; ma non si può pretendere di giudicare errato il comportamento di chi non le adotta, sotto pena di comportarsi come l'Inglese della storiella, secondo il quale il Continente era una regione sgradevole, anche perché « ... tutti i veicoli tengono sempre la mano sbagliata ». Invece le conseguenze logiche dei teoremi o anche semplicemente la coerenza con le convenzioni adottate sono cose necessarie, sotto pena di contraddirsi.

Ed in questo caso è opportuno ricordare ciò che scriveva B. Pascal: « La raison nous commande bien plus impérieusement qu'un maître; car en désobéissant à l'un on est malheureux, et en désobéissant à l'autre on est un sot ».

[1] Oltre alla conferenza di G. Polvani (v. nota 1 della precedente puntata sul n. 72) citiamo per esempio, per particolare profondità ed ampiezza, gli articoli seguenti: G. GIORGI, *Sistemi ed unità di Misura* in « Enciclopedia delle Matematiche elementari » (Milano 1951) Vol. III, Parte I, Art. XL e P. STRANEO, *Teoria generale delle dimensioni fisiche, sue caratteristiche applicazioni,* Ibid. Art. XLI. Per quanto riguarda le questioni didattiche ricordiamo per l'equilibrio e l'informazione l'articolo di L. BRUSOTTI, *Questioni didattiche,* Ibid. Vol. III. Parte II art. LXI.

L'U.M.I. E I PROBLEMI INERENTI LA RIFORMA DELLA SCUOLA SECONDARIA

(g.l.) Nella riunione del giorno 1 luglio 1977 la Commissione Scientifica dell'Unione Matematica Italiana ha discusso su « problemi inerenti la riforma della scuola secondaria »; dal verbale pubblicato sul n. 8-9 del 1977 del *Notiziario della Unione Matematica Italiana* riportiamo i tre documenti seguenti.

A) Il parere sulle lauree per l'accesso agli insegnamenti di « Scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali » e di « Applicazioni tecniche »:

La Commissione Scientifica ritiene che

1) l'insegnamento di « Scienze matematiche, fisiche, chimiche, e naturali » debba essere tenuto da laureati nella Facoltà di Scienze;

2) per l'insegnamento di « Applicazioni tecniche » debba essere richiesto per il futuro la laurea in Facoltà tecnico-scientifiche in cui è sviluppata l'attività in laboratorio (Ingegneria, Chimica Industriale, Farmacia, Agraria, Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali).

B) La mozione fatta propria dalla Commissione Scientifica:

« La Commissione Scientifica dell'UMI sottolinea la necessità che il dibattito sulla riforma della scuola secondaria superiore sia fondato su un'approfondita analisi dei bisogni di formazione culturale e professionale del Paese, e su un confronto con le soluzioni che ai problemi della trasformazione della scuola secondaria superiore sono stati dati, o sono allo studio, nei maggiori Paesi stranieri. Dà mandato ai membri UMI nella Commissione Didattica del COASSI di sollecitare in tal senso un intervento del COASSI nei confronti delle forme politiche e di governo ».

C) Il documento predisposto dalla « Commissione Contenuti minimi » e approvato all'unanimità dalla Commissione Scientifica (e riportato come allegato al verbale con il titolo « proposte dell'Unione Matematica Italiana riguardo ai contenuti minimi »):

1) L'invito a compiere una ricerca sui « contenuti minimi » per il biennio delle scuole secondarie superiori, in previsione di un'estensione dell'obbligo scolastico, ha trovato l'Unione Matematica Italiana già impegnata, attraverso la Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (C.I.I.M.) in un ampio lavoro di ricerca e di sperimentazione. I matematici italiani hanno avvertito da tempo la necessità di profondi mutamenti nell'insegnamento della matematica a livello delle scuole secondarie. Negli anni 1966-67 la C.I.I.M., in due convegni di insegnanti universitari e secondari svoltisi a Villa Falconieri (Frascati), aveva tracciato, dopo un lungo e approfondito dibattito, nuovi programmi per l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie superiori. Più recentemente, a partire dal 1975, la C.I.I.M. ha organizzato una rete di « nuclei di ricerca didattica » allo scopo di sviluppare una sperimentazione effettiva di vari programmi e varie metodologie. Questi « nuclei », operano attualmente in quasi tutte le regioni, compiendo sperimentazioni didattiche a cui collaborano insegnanti secondari e universitari. Il presente documento ha come scopo principale quello di offrire in forma sintetica il risultato di queste riflessioni e di queste esperienze.

2) Non c'è dubbio che l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie superiori subisce tuttora il danno di un isolamento dovuto sia alla prevenzione di vari settori culturali verso di essa e verso le scienze, sia alla errata propensione di alcuni matematici per una scienza « pura », sufficiente a se stessa. Questo stato di cose sta ora, fortunatamente, cessando. I matematici sono convinti che la scuola italiana debba compiere un salto qualitativo e quantitativo nell'inse-

(continua a pag. 20)