Seconda Conferenza:

EULERO MATEMATICO

a cura del Prof.Carlo Felice MANARA
Professore emerito di geometria
Università degli studi di Milano

1. Introduzione

La figura di Eulero matematico, vista dal nostro tempo, appare così grande che il trattarne completamente in un singolo intervento può apparire superficialità e presunzione. Pertanto ho scelto di parlare soltanto di alcuni aspetti della sua opera monumentale; precisamente di quegli aspetti che hanno fatto di lui un precursore della matematica successiva. Infatti appare meraviglioso il fatto che la matematica di oggi ancora sviluppi certe idee che nacquero dalla sua mente e che la tecnica di oggi ancora faccia ricorso alle metodologie iniziate da lui, pur nel progresso rapidissimo che la scienza e la tecnica hanno fatto registrare, soprattutto negli ultimi decenni.
Pertanto il mio intervento può essere giustamente giudicato limitato e parziale se pesato dal punto di vista della completezza storica; ma il suo carattere nasce dai criteri di esposizione di cui ho detto.

2. Eulero e la geometria differenziale.

Un primo argomento nel quale l'opera di Eulero appare pionieristica è quello dell'applicazione dell'analisi matematica alla geometria; per far comprendere meglio ciò che intendo dire vorrei ricordare l'osservazione classica, secondo la quale si potrebbe dire che i problemi di meccanica razionale e di geometria hanno stimolato la nascita ed in qualche modo dato origine all'analisi matematica: si legge infatti che il concetto di "funzione derivata" è nato con il concetto di "velocità" di un moto, ed ha stretta attinenza con il problema di tracciare la retta tangente di una curva in un suo punto. In questo argomento, che già a quei tempi era, per così dire, classico nella matematica, Umore introdusse metodicamente l'impiego della derivata di ordine superiore al primo; e quindi aprì la strada alla costruzione di quegli invarianti differenziali degli oggetti geometrici che costituiscono un capitolo importantissimo della geometria differenziale e condussero a quei metodi di calcolo ed a quelle concezioni che sfociarono nel calcolo differenziale assoluto (o calcolo tensoriale) e quindi ai fondamenti geometrici della relatività.
In questo ordine di idee rimane classica l'analisi che Eulero fece delle curvature delle sezioni piane di una superficie in un suo punto; Eulero infatti prese in considerazione le curve che si ottengono secando una superficie, in un suo punto regolare, con i piani del fascio che ha per asse la normale alla superficie stessa nel punto dato. Egli calcolò le curvature di queste curve e dimostrò che esistono due piani, tra loro perpendicolari, a cui corrispondono la curvatura massima e la minima [Fig.1a].

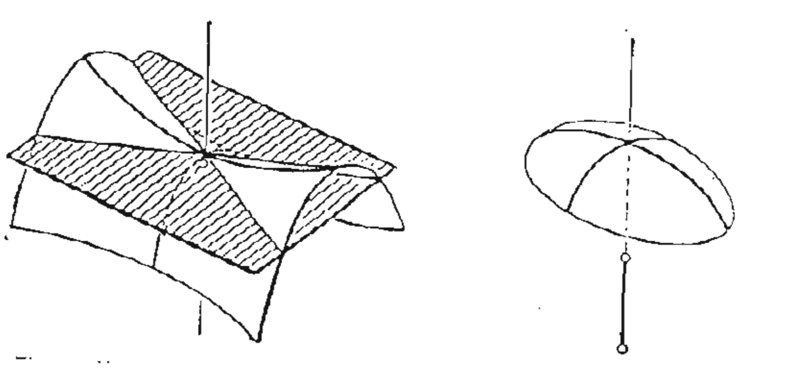


Fig. 1a

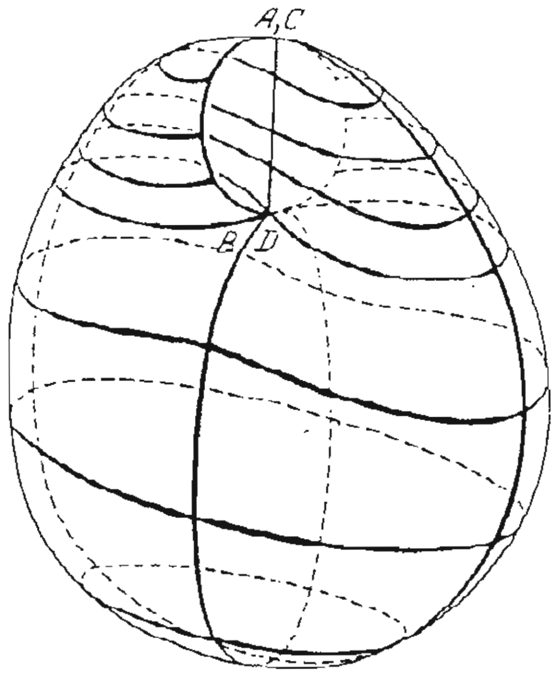


Fig. 1b

Fanno eccezione due casi: quello del piano, in cui tutte le sezioni sono rette ed hanno quindi curvatura zero, e quello della sfera, in cui tutte le sezioni hanno lo stessa curvatura.
Fu poi dimostrato che la conoscenza delle due curvature (la massima e la minima) delle sezioni normali della superficie permette di determinare anche la curvatura della sezione della superficie stessa con un piano qualunque (quindi anche non passante per la normale). Inoltre l'analisi di Eulero aprì la strada per la costruzione di certi invarianti locali dei punti di una superficie, invarianti costruiti con quei due valori (massimo e minimo di cui abbiamo detto). In particolare si presero in considerazione alcune funzioni di questi due valori (il massimo ed il minimo della curvatura); e ad alcune di queste funzioni furono dati nomi particolari. Per esempio il prodotto delle due curvature estreme è chiamato "curvatura totale", o anche curvatura di Gauss, dal nome del grande matematico tedesco che ne mise in luce varie proprietà importantissime; la somma dei due valori è chiamata "curvatura media"; la sua considerazione è di fondamentale importanza per i problemi riguardanti le superfici di area minima. Tutti questi sviluppi, ed anche le teorie che ne conseguirono, ebbero la loro origine nell'analisi che Eulero fece delle sezioni piane di una superficie in un suo punto e possono quindi essere considerate come i frutti di un germe vitalissimo piantato da Eulero.

3. La nascita della topologia, nuovo ramo della scienza geometrica.

Un secondo argomento in cui Eulero operò da pioniere riguarda quel capitolo importantissimo della matematica; ramo che dai classici fu chiamato talvolta "Analysis situs" e che oggi prende il nome di topologia.
In questo ambito due risultati di Eulero sono classici e portano il suo nome. Il primo è costituito dalla soluzione del celebre problema detto "dei ponti di Königsberg"; tale problema viene riportato in moltissimi testi di divulgazione del pensiero matematico e perciò ci limitiamo ad accennarne qui in modo sommario: è noto che la città di Königsberg è attraversata dal fiume Nekar, che forma un'isola; questa è congiunta alla terraferma da vari ponti ed il problema classico potrebbe essere formulato domandando se è possibile determinare un percorso che passi su ognuno dei ponti una sola volta [Fig.2].
Volendo presentare le cose con il vocabolario di oggi, si potrebbe dire che la soluzione data da Eulero al problema fu conseguita sostanzialmente trasformando il problema stesso in un altro

isomorfo, che oggi noi classifichiamo come attinente alla teoria dei grafi, e dimostrando così che non esistono soluzioni.

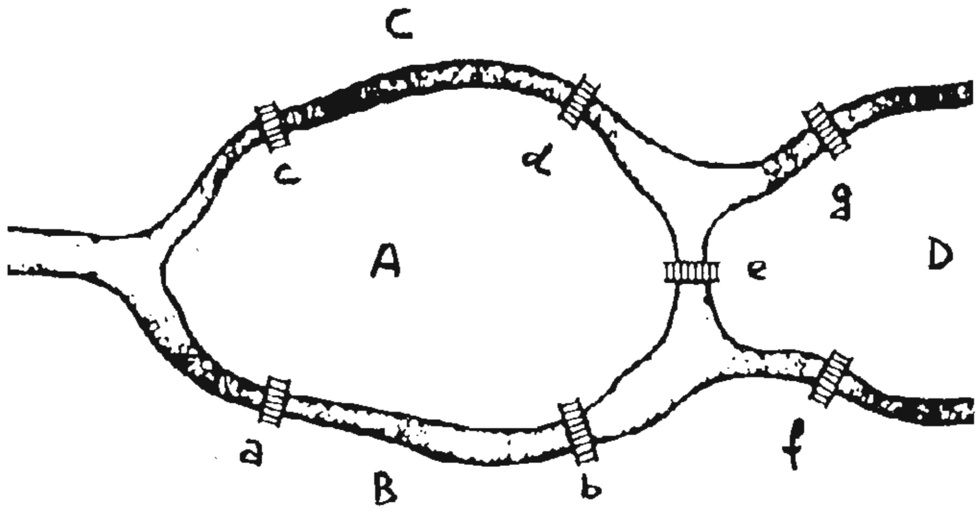


Fig. 2

La circostanza che desta di più l'ammirazione è il fatto che per dare la soluzione egli non esitò ad uscire dagli schemi tradizionali della matematica del suo tempo ed a creare un simbolismo diverso da quello per così dire ufficiale.
E chi ha anche una piccola conoscenza delle applicazioni più moderne della matematica si rende conto della importanza capitale della strada aperta dal matematico di Basilea. Riassumendo, vorrei dire che si apriva una nuova epoca della geometria, e nasceva un nuovo ramo di questa scienza. Precisamente un ramo in cui l'attenzione dei ricercatori era attirata non più dalle misure degli angoli e delle lunghezze, ma dai semplici fatti che certi elementi fossero in certe relazioni di appartenenza con certi altri. In forma pittoresca si potrebbe dire che accanto alla geometria dei movimenti rigidi e delle trasformazioni per similitudine, nasceva la geometria degli enti deformabili con continuità; quindi l'orizzonte della ricerca geometrica si dilatava e veniva così ad acquisire tutto un nuovo mondo di proprietà, prima inesplorato e addirittura ignorato.

Considerazioni e valutazioni analoghe potrebbero essere formulate a proposito del secondo teorema di cui vorrei parlare, teorema dimostrato da Eulero e che ancora oggi viene richiamato con il suo nome; si tratta della relazione che intercede tra il numero delle facce, quello degli spigoli e quello dei vertici di un poliedro convesso; relazione che riguarda la somma del numero delle facce e quello dei vertici, accertando che tale somma supera di due il numero degli spigoli [Fig.3]. Infatti il suo teorema è stato generalizzato in vari modi: per esempio si è indagato sulla sua applicabilità a figure poliedriche non convesse; la relazione, dimostrata da Eulero per i poliedri convessi, è stata così estesa a casi sempre più generali, ed il nome di "poliedri euleriani" che si dà oggi ai poliedri per i quali vale la relazione originaria di Eulero sta ad indicare l'importanza del suo risultato.Ma l'aspetto più importante e più fecondo della proposizione di Eulero sta nel fatto che anche questa rientra nel novero di quelle che conservano validità (dopo un minimo di modifiche puramente verbali) quando la figura poliedrica venga sottoposta a trasformazioni biunivoche e continue. Pertanto anche in questo argomento il risultato di Eulero costituisce il seme di tutta una branca di ricerche e di proprietà che rientrano nell'ambito della topologia algebrica e che non posso enumerare con un minimo di completezza. Mi limiterò a ricordare che in questo ordine di idee, quella differenza di due unità tra la somma dei numeri delle facce e dei vertici e quella degli spigoli è stata generalizzata in vari modi. Per esempio si è così ottenuto quell'invariante che viene chiamato "genere" di una superficie di Riemann, collegata con una curva algebrica. Ed in modo analogo sono stati costruiti vari importanti invarianti numerici della geometria algebrica.

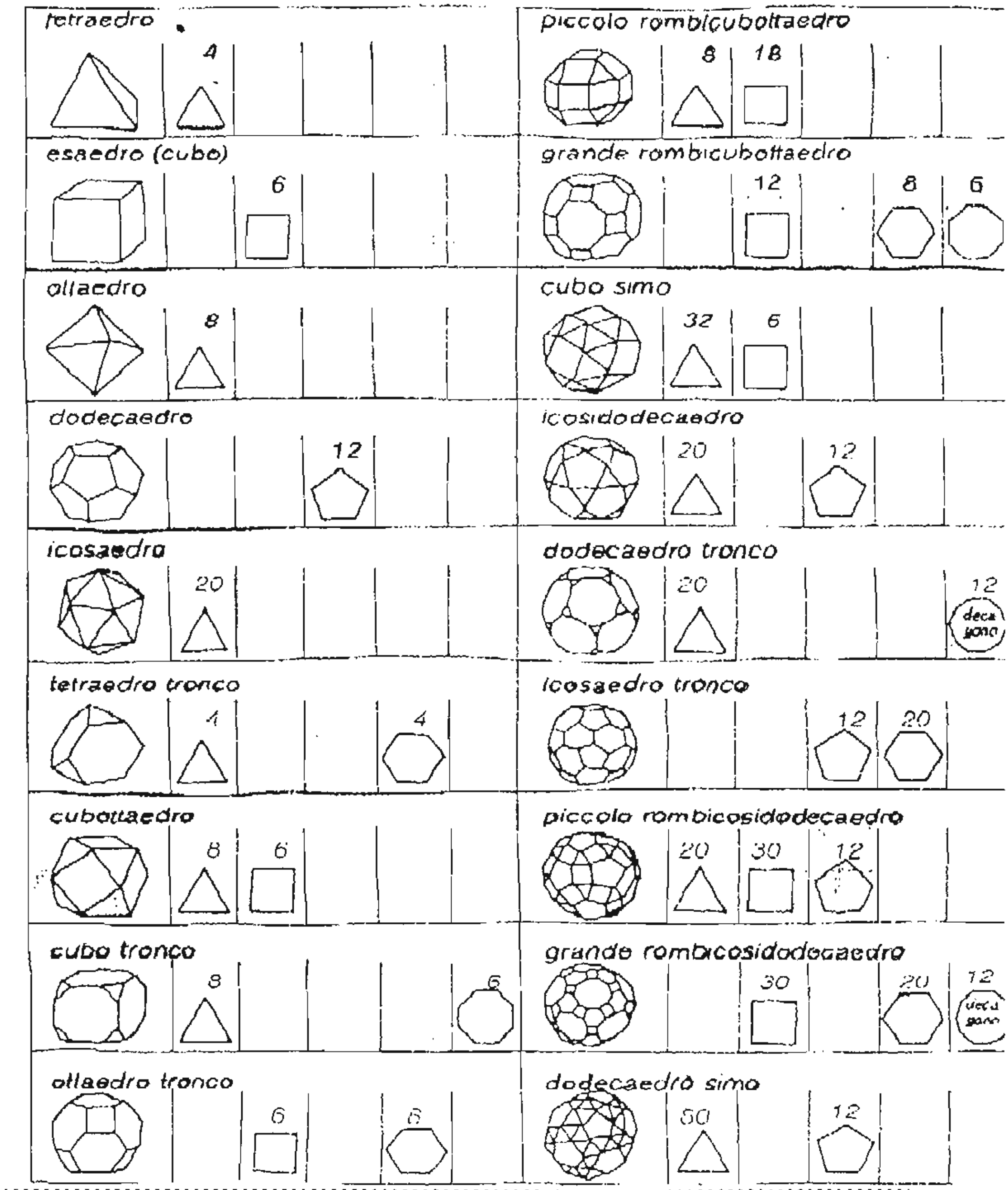

tetraedro
4
esaedro (cubo)
6
ottaedro
8
dodecaedro
12
icosaedro
20
tetraedro tronco
4
4
cubottaedro
8
6
cubo tronco
8
6
ottaedro tronco
6
6
piccolo rombicubottaedro
8
18
grande rombicubottaedro
12
8
6
cubo simo
32
6
icosidodecaedro
20
12
dodecaedro tronco
20
12
decagono
icosaedro tronco
12
20
piccolo rombicosidodecaedro
20
30
12
grande rombicosidodecaedro
30
20
12
decagono
dodecaedro simo
80
12

Fig. 3

4. La nascita del calcolo delle variazioni.

Un terzo argomento nel quale l'opera di Eulero si è rivelata il seme di importantissime ricerche successive riguarda quello che oggi è chiamato "calcolo delle variazioni".
Penso che, per cercare di descrivere in modo sommario l'argomento valga la pena di accennare alle sue origini storiche.
Tra queste vorrei ricordare la teoria degli isoperimetri, di cui già si è occupata la geometria dell'epoca alessandrina. Tale teoria si occupa di ricercare tra certe figure, che soddisfano a determinate condizioni, quelle che hanno particolari proprietà di massimo o di minimo. Per es. già i geometri greci avevano dimostrato che tra tutti i triangoli di dato perimetro quello di area massima è l'equilatero; e quindi che tra tutti i triangoli di area data l'equilatero è quello di perimetro minimo.
L'invenzione dei metodi del calcolo infinitesimale fornì tutta una serie di nuovi strumenti per la risoluzione dei problemi di ricerca dei valori ottimali (sotto certi aspetti) di determinate funzioni. In forma molto rudimentale e sommaria si potrebbe dire che, con la considerazione della funzione derivata di una data, la ricerca dei valori ottimali (massimi oppure minimi, a seconda dei casi) di quest'ultima viene ricondotta alla ricerca delle soluzioni degli zeri della derivata.
In particolare incontriamo questo procedimento presso uno dei fondatori del calcolo infinitesimale: W.G.Leibniz. Il titolo di un'opera classica di questo matematico e filosofo inizia appunto con le parole: « Nuovo metodo per i massimi e minimi, come pure per le tangenti ecc. » [Nova methodus pro maximis et minims itemque tangentibus &c.]
La scienza fisico-matematica della seconda metà del secolo XVIII aveva tuttavia sviluppato dei concetti ed affrontato delle questioni che ponevano alla matematica dei problemi del tutto nuovi. Voglio parlare in particolare delle idee riguardanti la meccanica dei sistemi materiali e della loro evoluzione nel tempo. Una certa visione delle scienze della natura induceva gli studiosi ad presentare le leggi della meccanica e della fisica deducendole da certi principi molto generali di ottimalità.
Ed in questo ordine di idee sono note varie interpretazioni delle celebri equazioni di Lagrange.
La novità della problematica matematica che nasceva da questi atteggiamenti consiste nel fatto che i problemi riguardavano non i singoli valori delle funzioni coinvolte, ma l'intero periodo in cui i fenomeni si svolgevano. Per impiegare il linguaggio matematico, le incognite dei problemi diventavano non singoli numeri (o gruppi di numeri e coordinate che fornivano i valori massimi o minimi di certe funzioni) ma addirittura le funzioni di certe variabili; e le grandezze da rendere ottimali (massime o minime) non erano più singoli valori numerici, ma i valori di certi integrali delle funzioni stesse. Celebre per esempio in questo ordine di idee è il problema della brachistocrona formulato da Giovanni Bernoulli nel 1696; in tale problema si cerca la curva che rende minimo il tempo di caduta di un punto materiale che la percorra sottoposto alla forza di gravità; tale curva è un arco di cicloide, la celebre curva studiata da Blaise Pascal nel secolo XVII [Fig.4].

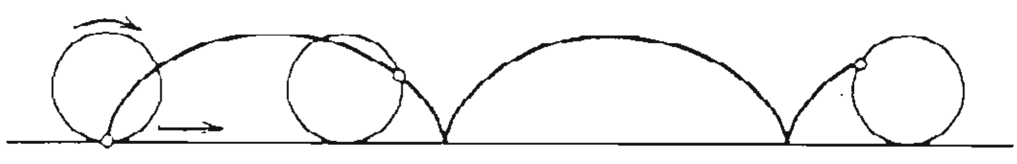


Fig. 4

Problemi di questo tipo sono stati trattati da matematici di primo piano durante tutto il secolo scorso ed ancora oggi sono studiati per la loro importanza in vista delle applicazioni tecniche; una delle branche di questa problematica è per esempio la moderna teoria del controllo ottimale, che trova applicazioni per esempio nell'economia e nella meccanica applicata.
Eulero risolse il problema iniziale di questa categoria, riconducendo la ricerca della funzione che rende massimo (o minimo) un certo integrale su di un intervallo a quello della soluzione di una certa equazione differenziale del secondo ordine, o di un sistema di equazioni cosiffatte, che ancora oggi sono ricordate con il suo nome. Il problema della ricerca di una certa funzione che soddisfacesse ad una condizione per così dire globale, relativa all'intero intervallo di definizione veniva così ricondotto al problema di determinare una funzione che soddisfacesse localmente, punto per punto, a certe condizioni differenziali.

5. I contributi di Eulero alla teoria dei numeri, alla logica ed alla geometria elementare.

I pochi e sommari cenni che ho dato dell'opera di Eulero matematico geniale sono - ripeto - soltanto una minima parte delle cose che si potrebbero dire; il criterio di scelta che mi ha guidato mi permette di mettere in evidenza un aspetto che mi pare molto interessante della sua opera: oltre al fatto di aver iniziato delle correnti di ricerca che ancora oggi sono vive e valide, vorrei osservare che questi nuovi sentieri per la scienza hanno il loro punto d'inizio in problemi concreti; questi ci appaiono a prima vista banali e di scarso interesse, ma l'intuizione del genio ha saputo costituire, con la loro soluzione, l'inizio di certe linee di pensiero che sono vive ancora oggi.
Tuttavia occorre ricordare che nell'opera del geniale svizzero vi sono anche molti altri capitoli che riguardano argomenti importantissimi della matematica. Mi limiterò a ricordare anzitutto i suoi lavori sul moto dei sistemi materiali: e precisamente sul moto dei sistemi rigidi e sul moto dei sistemi deformabili.
In secondo luogo ricorderò le sue ricerche sulla teoria dei numeri naturali; in questo ambito i problemi riguardanti i numeri primi sono particolarmente ardui, e presentano grandissime difficoltà, ed ancora oggi affaticano le menti dei più grandi matematici. Orbene Eulero seppe lasciare il segno del suo passaggio anche in questo un argomento; egli infatti diede una formula quadratica che fornisce moltissimi numeri primi, a partire dal 41. [Fig.5].

TABULAZIONE DEI PRIMI 40 NUMERI OTTENUTI CON LA FORMULA DI EULERO

$$N = 41 + x + x^2$$

Per $0 \leq x \leq 39$

si ottiene:

41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 115, 173,
197, 223, 251, 281, 313, 383, 421, 461, 503, 547, 593,
641, 691, 743, 797, 853, 911, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301,
1373, 1447, 1523, 1601.

Dopo 40 numeri, tutti primi, i primi composti si ottengono per $x = 40$, $[1681 = 41^2]$ e per $x = 41$, $[41 \cdot 43]$.

Sostituendo per x i valori da 42 a 50 si ottengono altri 7 numeri primi, e precisamente:

1847, 1933, 2111, 2203, 2297, 2393, 2591.

OSSERVAZIONE

I numeri dati nelle tabelle sono tutti primi, ma non sono tutti i primi che esistono negli intervalli considerati: per esempio tra i minori di 100 mancano nella tabella:

59, 67, 73, 79, 89.

Fig. 5

Tuttavia il suo genio non trascurò anche gli ambiti più elementari della matematica; in particolare si ricorda un suo teorema che riguarda il triangolo, cioè uno degli argomenti classici, che hanno formato oggetto di studi secolari; eppure anche in questo campo, che si direbbe reso sterile dalla assidua coltivazione, Eulero seppe vedere, con il suo sguardo particolarmente acuto, un fiore che era sfuggito ai ricercatori precedenti; egli infatti dimostrò che tre punti notevoli di un triangolo: il centro della circonferenza circoscritta, il baricentro e l'ortocentro, stanno su una medesima retta, la quale ovviamente viene anche oggi chiamata "retta di Eulero" [Fig.6].

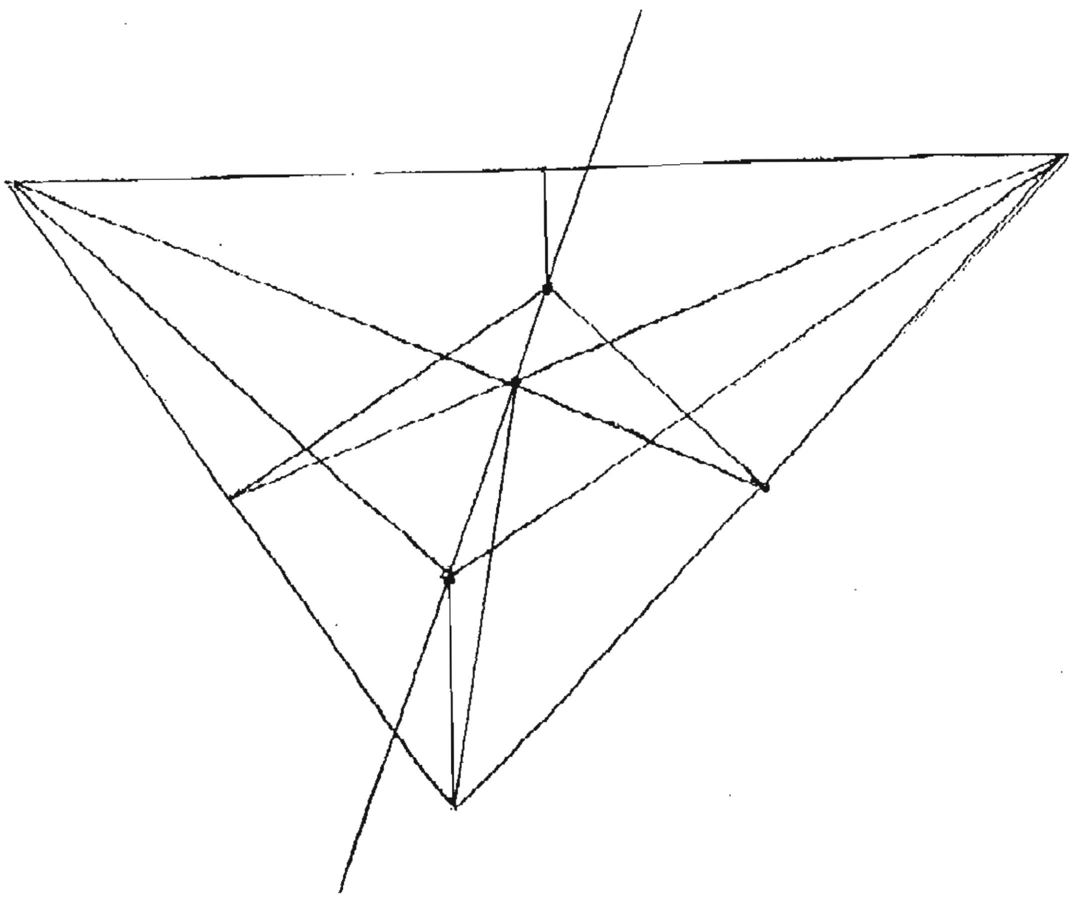
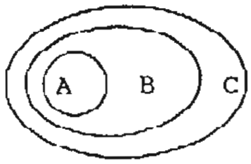


Fig. 6

Non posso infine dimenticare anche il sussidio che Egli diede alla didattica della logica; sono infatti rimaste classiche le illustrazioni grafiche, che egli diede dei rapporti logici tra concetti, con i celebri diagrammi che ancora oggi vengono richiamati con il suo nome. E vorrei dire che anche in questo campo Eulero si situa all'inizio di un metodo che conduce alla rappresentazione convenzionale diretta dei concetti e dei loro rapporti; rappresentazione che non utilizza il linguaggio comune [Fig.7].

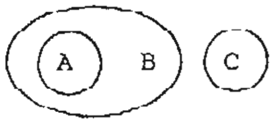
EULERO

FORME PERFETTE DI SILLOGISMO DELLA PRIMA FIGURA.



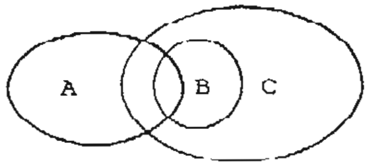
BARBARA

Ogni B è un C; ogni A è un B. Dunque ogni A è un C.



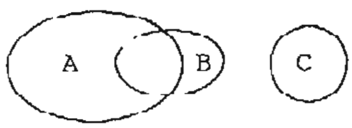
CELARENT

Nessun B è un C; ogni A è un B. Dunque nessun A è un C.



DARII

Ogni B è un C; alcuni A sono B . Dunque alcuni A sono C.



FERIO

Nessun B è un C; alcuni A sono B. Dunque alcuni A non sono C.

Fig. 7

6. La ricerca matematica.

A conclusione della mia breve esposizione, vorrei ricordare una celebre formula, che ancora oggi porta il nome di Eulero, e che lega la base dei logaritmi neperiani (il numero abitualmente indicato con "e"), la costante di Archimede (il numero indicato con "pigreco"), l'unità immaginaria i, il numero uno ed il numero zero. Eulero ha dimostrato che queste costanti sono legate in modo tale che "e, elevato ad i volte pigreco, più uno, vale zero".
Questa formula ha fatto dire a molti che essa coinvolge alcune tra le costanti più importanti della matematica. Si tratta di una riflessione che mi sembra atta a figurare come una specie di ritratto ideale del grande di Basilea: la sua opera ha spaziato si può dire su tutta la matematica, ed il suo genio è ancora oggi ricordato con i contributi essenziali da lui portati alla scienza ed al progresso dell'uomo.
Un matematico ha scritto una volta che spesso la soluzione di un problema matematico si potrebbe accostare al tentativo si giungere alla cima di un monte, attraverso cespugli, boschi, anfratti e dirupi; ma quando il ricercatore giunge alla cima, sudato, stanco, graffiato e con i vestiti strappati si accorge, guardando di lassù, che esiste una strada larga e comoda, che conduce al punto da lui conquistato con tanta fatica e pena. Ma, ritornando con la memoria a tutta la vicenda, deve anche

ammettere che la fatica e la pena non sono state inutili, e che anzi hanno contribuito alla sua crescita intellettuale.
Tuttavia ciò che ho detto vale per la maggioranza dei ricercatori: esistono infatti quelle menti privilegiate, quelle creature rarissime che non debbono attraversare foreste e cespugli, ma che giungono alla cima quasi volando, come l'aquila giunge in alto in modo che per lei è del tutto naturale, perché è padrona dell'aria. Una di queste creature eccezionali e rarissime fu Eulero il quale, come ho cercato di fare vedere, lasciò il segno in tanti campi della matematica, lavorando in modo che quasi dà l'impressione di totale assenza della fatica, ma invece presenta l'immagine di un dominio tranquillo della scoperta, una facilità di invenzione e di creazione che lascia il segno nei secoli.
E ciò mi richiama alla mente una espressione classica, che fu ripresa anche da Newton: secondo questo modo di vedere noi crediamo di vedere lontano, forse più lontano dei nostri padri e dei nostri predecessori; ma possiamo fare questo perché siamo come dei pigmei seduti sulle spalle di giganti, e da loro portati, ed innalzati da terra per la loro fatica.
Uno di questi giganti è certamente Leonhard Euler; egli ci porta sulle sue spalle e ci aiuta a guardare lontano.

PRESENTAZIONE

L'opera scientifica di Eulero è gigantesca ed impressiona per quantità, ricchezze di idee ed attualità. Infatti egli diede fondamentali contributi non solo nel campo della matematica ma anche in quelli, fra gli altri, della astronomia, della meccanica e dell'ottica.
Eulero ebbe inoltre ben presenti le possibili applicazioni tecniche dei principi della fisica occupandosi anche di balistica, di scienza navale e di stabilità delle costruzioni. È soprendente come questa attività essenzialmente teorica sia stata così feconda di risultati pratici.

Eulero si distinse anche per le sue riflessioni sulla filosofia della scienza.
La tradizione riferisce che egli soleva dire che la sua penna lo superasse in intelligenzas così spontaneo era il fiume di memorie che uscivano da essa. Nel corso della sua vita Eulero pubblicò più di 500 lavori, tra libri e articoli, e per quasi mezzo secolo dopo la sua morte fra le pubblicazioni dell'Accademia di Pietroburgo continuarono ad apparire suoi lavori (citazione da Carl B. Boyer, Storia della matematica).

Questo ciclo di conferenze si propone di far conoscere in forma accessibile ad un largo pubblico alcuni aspetti rilevanti di uno scienziato così poco noto anche in Svizzera, sua patria di origine.

RELATORI

Aldo Cauvin, professore ordinario di "Costruzione di ponti e grandi strutture" presso la facoltà di Ingegneria dell'Università di Pavia.

Carlo Felice Manara,

Giuseppe Stagnitto, dottore in ingegneria civile, collaboratore scientifico della Cattedra di "Costruzione di ponti e grandi strutture" presso la facoltà di Ingegneria dell'Università di Pavia.

... **Tagliaferri**,

RESPONSABILE

Dario Bozzolo, responsabile della Postformazione presso la Scuola d'ingegneria.

DESTINATARI

Chiunque sia interessato non solo a livello specialistico ma anche a livello puramente culturale alla storia della scienza ed in particolare ai suoi sviluppi nel corso del XXIII secolo, che hanno in Eulero una delle figure cardinali.

PROGRAMMA

Il corso prevede un ciclo di quattro conferenze di due ore ciascuna.

Orario del corso: venerdì, ore 20.00 - 22.00.

venerdì 31 maggio — **I tempi di Eulero**:

- il quadro storico,
- la scienza nell'epoca dell'Illuminismo,
- profilo biografico.

martedì 4 giugno — **Eulero e la matematica**:

- attualità di Eulero,
- l'applicazione dell'analisi alla geometria,
- la topologia e il celebre problema dei ponti di Könisberg,
- il calcolo delle variazioni.

venerdì 7 giugno — **Eulero e la fisica**:

- (acustica, ottica, fluidodinamica, astronomia, … ??)
-

martedì 11 giugno — **Eulero e l'ingegneria**:

- i rapporti fra scienza e tecnica nell'opera di Eulero,
- i contributi alla meccanica,
- l'ordine della natura nella visione scientifica, filosofica e religiosa di Eulero.