menti di logica e di informatica. Se si pensa e ci si dedica solamente ai tecnicismi specialistici che sono propri di tali settori della matematica certo è deludente quanto poco di essi sia possibile e convenga trasmettere nell'insegnamento scolastico della scuola media. Ma se si considera la possibilità di una ricostruzione razionale, non necessariamente continuista, degli sviluppi dalla logica formale alla logica matematica e dall'argomentazione alla vera e propria dimostrazione, allora il quadro e il progetto acquistano indubitabilmente una maggiore consistenza sia epistemologica che pedagogica.

I lavori di gruppo

Il lavoro di gruppo è certo il momento di massimo interscambio tra i convegnisti. Con tutto quello che ciò comporta di impegno a capire e a farsi capire. Ma anche di attitudine ad ... inventare, seduta stante e senza preaccordo, un modello comune di riferimento o — per dirla alla maniera della retorica classica — un 'luogo' di ritrovamento, rispetto al quale immediatamente si capisca chi accetta la sfida della comunicazione e chi invece la ricusa perché la teme. Nel recente Convegno romano, in dipendenza dagli orientamenti e dagli impulsi dati alla riflessione comune dalle relazioni, i *problemi* universalmente riconosciuti sembrano da ricollegare sia alla incompetenza linguistica dei ragazzi che alla connessa difficoltà circa la concettualizzazione, sia generica che specifica.

In conseguenza di ciò, tanto nelle riflessioni quanto nelle esemplificazioni adottte, in termini di *prospettive* sono venute emergendo talune coerenti proposte.
Anzitutto quella di ricorrere a ragion veduta, cioè programmaticamente e per concetti effettivamente basilari, ad una conveniente moltiplicazione non ripetitiva dei casi o che dir si voglia degli esercizi da affrontare. Ciò dovrà essere effettuato entro un ventaglio più o meno ampio di varianti, così che gli studenti possano riconoscere — potenziando adeguatamente la loro attitudine al ricorso all'analogia, all'identità e alla differenza — i caratteri generali ed essenziali di ciascun concetto in esame, nella contestualità in cui si presenta e vive.
È stato inoltre sostenuto che la valorizzazione delle facoltà immaginative e operative degli studenti deve essere funzionale e mirare precisamente al conseguimento della capacità argomentativa.
In relazione, infine, alla necessità di un ciclico ritorno didattico sui concetti essenziali si è voluto richiamare l'attenzione su due interessanti e complementari prospettive. Da un canto quella di valorizzare il disegno come forma specifica di discorso e, in connessione, della geometria come luogo privilegiato (qualcuno ha sostenuto anche 'spontaneo' per noi italiani) dell'immaginario matematico. Dall'altro quella di proporre il simbolismo matematico in chiave sia semiologica che estetica: tale cioè da esser dotato della capacità di condurre verso la sorprendente realtà delle cose **(Pierluigi Pizzamiglio,** docente di Storia della Matematica, Univ. Cattolica, sede di Brescia**)**.

Epistemologia della matematica

Carlo Felice Manara

L'evoluzione recente della Matematica

Per poter analizzare, anche in forma sommaria e sbrigativa, lo statuto epistemologico della Matematica, è utile soffermarsi sull'evoluzione che questa scienza ha avuto nei tempi più recenti, ed in particolare negli ultimi due secoli. Invero la Matematica viene spesso considerata come una scienza rigida, chiusa, quasi fossilizzata nei suoi metodi e nel suo assetto; essa è invece una scienza viva, che si evolve insieme con l'evolversi rapidissimo e con il progredire di tutto il pensiero scientifico. Si potrebbe addirittura dire che non soltanto l'evoluzione della Matematica accompagna quella di tutto il pensiero scientifico, ma anzi che l'evoluzione della Matematica è uno dei momenti più importanti di questo progresso. Come infatti cercheremo di far vedere, la Matematica rappresenta una delle strutture portanti della scienza, nella concezione moderna del termine. Questa nostra opinione potrebbe essere confermata e convalidata dalla citazione di molti filosofi e pensatori, che hanno riflettuto sulla scienza; tra i tanti, scegliamo di ricordare il pensiero di Galileo. In un celebre passo del suo dialogo intitolato «Il saggiatore» il grande Pisano scrisse che il libro dell'universo è scritto in caratteri matematici. Ed aggiunse che chi non conosce tali caratteri non potrà mai leggere in quel libro, ed è destinato ad aggirarsi nell'universo come in un oscuro labirinto.
Come abbiamo già detto, pensiamo che sia particolarmente importante la maturazione avvenuta nella Matematica negli ultimi due secoli: infatti in questo


Giuseppe Peano (1858-1932).

periodo la Matematica ha fatto registrare una profonda evoluzione, che l'ha fatta passare dalla struttura tradizionale a quella che possiede ancora oggi, o, meglio, possedeva fino alla diffusione massiccia dei mezzi elettronici di calcolo e di elaborazione dell'informazione. È difficile poter dare un'idea precisa di questa evoluzione senza entrare in particolari tecnici e senza utilizzare il linguaggio specifico della Matematica. Ci dovremo quindi limitare a qualche accenno generico; a tal fine osserviamo che, sino alla fine del secolo XVIII, la Matematica veniva considerata come una scienza definita dai suoi oggetti, dai suoi contenuti. Questo atteggiamento è condiviso anche oggi da qualcuno che crede di poter dare una definizione della Matematica che riecheggia quella che si incontrava presso i filosofi e gli scienziati del '700. La Matematica veniva allora definita come «la scienza dei numeri» oppure come «la scienza della quantità»; spesso a queste frasi generiche venivano aggiunte delle precisazioni specifiche: per esempio la «quantità», considerata come un concetto generico, veniva suddivisa in «quantità continua», che avrebbe dovuto essere l'oggetto della Geometria, ed in «quantità discreta», che avrebbe dovuto essere l'oggetto dell'Aritmetica.
Noi pensiamo che uno dei risultati più importanti della recente evoluzione della Matematica sia proprio quello di aver fatto superare questi atteggiamenti, che pretendevano di definire questa scienza attraverso i suoi oggetti, per concentrare invece l'attenzione degli studiosi sulle procedure della Matematica. In questo ordine di idee, si potrebbe dire che questa scienza ha esteso di molto il proprio dominio; infatti nell'atteggiamento precedente tale dominio era pensato strettamente limitato agli enti che in qualche modo possono essere quantificati, misurati, rappresentati con numeri. Invece, nell'atteggiamento più moderno, vengono trattati con procedimenti matematici per esempio anche dei

problemi che riguardano la logica formale, la teoria delle scelte e delle decisioni, e così via; cioè degli argomenti che difficilmente si potrebbero pensare come legati ad oggetti in qualche modo misurabili o quantificabili.

La crisi della Geometria nel secolo XIX

Uno dei momenti determinanti nell'evoluzione della Matematica è costituito dall'invenzione delle Geometrie non-euclidee, e soprattutto dalla dimostrazione che queste dottrine sono logicamente valide, cioè dalla dimostrazione del fatto che esse non soltanto non mostrano alcuna contraddizione apparente, ma non potranno mai mostrarne, perché sono intrinsecamente coerenti.

Questa dimostrazione costrinse i matematici a cambiare radicalmente il modo di concepire la Geometria. Supponiamo infatti che esista un ente esterno a noi, che sia l'oggetto di questa scienza, ente da chiamarsi «estensione», o «spazio geometrico» o con altri nomi, che di volta in volta sono stati inventati; se tale ente esistesse, esso non potrebbe essere descritto o studiato con dottrine contraddittorie tra loro, come sono la Geometria euclidea ed una qualunque tra le non-euclidee. E ciò perché una delle posizioni iniziali ed irrinunciabili che stanno alla base di ogni teoria scientifica è l'accettazione della coerenza interna della realtà che si studia.

Per comprendere meglio ciò che intendiamo dire, vorremmo rimeditare brevemente sulla struttura del primo trattato scientifico che la Storia umana ricordi: intendiamo parlare del trattato degli «Elementi» di Euclide, che ci si presenta come una specie di miracolo del pensiero e dell'intelligenza dei Greci. Miracolo che è ancora più grande di quanto non appaia a prima vista, perché, secondo gli storici dell'età alessandrina, il trattato euclideo ci trasmette i frutti di un pensiero matematico precedente, i cui documenti non sono giunti fino a noi direttamente.

Il trattato euclideo ci si presenta come una successione di proposizioni; alcune di queste descrivono gli enti di cui si parlerà nel seguito. Altre enunciano delle verità che vengono abitualmente considerate come incontestabili; queste proposizioni vengono presentate da Euclide sotto il nome di «Nozioni comuni». Altre proposizioni infine vengono presentate come delle richieste di assenso, e vengono chiamate appunto «Postulati», cioè richieste; queste ultime proposizioni riguardano delle proprietà non di tutti gli enti in generale, ma specificamente degli enti della Geometria, o delle operazioni che si eseguono su di essi. Tra queste proposizioni è il celebre Postulato che viene detto «di Euclide» quasi per antonomasia, e che enuncia, in sostanza, la unicità della parallela ad una data retta per un punto fuori di essa.

Queste proposizioni, cioè le «Nozioni comuni» ed i «Postulati», sono date senza dimostrazione cioè semplicemente affermate; le altre proposizioni sono dimostrate, oppure espongono soluzioni di problemi ottenute con procedure e ragionamenti rigorosamente fondati sulle proposizioni enunciate in precedenza.

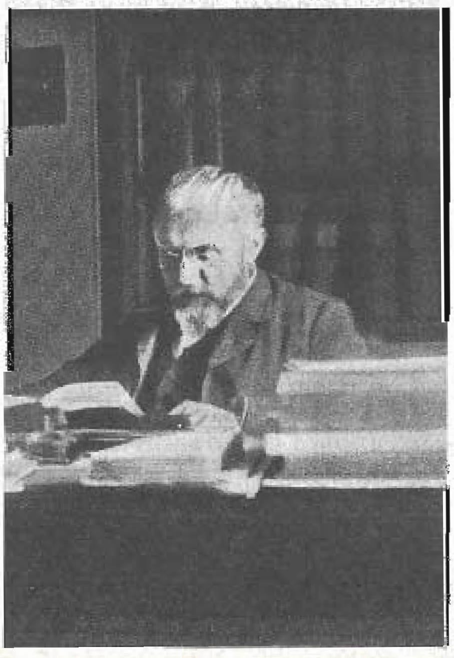
La struttura del trattato euclideo è stata considerata per secoli come paradigmatica di ogni trattato scientifico che coinvolgesse la Matematica; a questo modello si sono ispirati anche gli estensori di altri celebri trattati che hanno fatto epoca nella storia del pensiero umano: per esempio la celebre opera di Isacco Newton intitolata, come è noto, «Philosophiae naturalis principia mathematica» (Principi matematici della filosofia naturale).

Si può osservare che le Nozioni comuni ed i Postulati sono stati considerati, nel corso dei secoli, come delle proposizioni accettabili in forza della loro evidenza; in altre parole come delle proposizioni che vengono accettate in forza del fatto che enunciano delle proprietà vere di certi enti che si osservano, proprietà che sono talmente semplici ed elementari che non hanno bisogno di alcuna dimostrazione.

Come abbiamo detto, l'invenzione delle Geometrie non-euclidee ha costretto i matematici a cambiare questo punto di vista: di conseguenza la concezione che oggi si ha della Geometria ci presenta questa scienza sotto due aspetti abbastanza distinti, ma non contraddittori tra di loro, anzi in certa misura complementari, come vedremo.

Uno di questi aspetti viene descritto presentando la Geometria come un «Sistema ipotetico-deduttivo»: con questa espressione si intende dire che la Geometria viene così considerata come una specie di gioco logico, nel quale la validità di una qualunque proposizione non è data dalla corrispondenza tra gli enunciati ed i loro contenuti, riferiti ad una realtà determinata esistente fuori di noi.

Henri Poincaré (1854-1912).



La Geometria viene quindi considerata come un puro gioco, analogo al gioco degli scacchi, o ad un altro qualunque gioco inventato dall'uomo, nel quale la cosa più importante è l'ubbidienza alle regole liberamente stabilite e scelte, non imposte dalla aderenza ad una qualunque realtà esteriore.

Pertanto, in questo atteggiamento, i punti di partenza sono considerati come delle pure ipotesi di ragionamento; e la validità delle conclusioni e delle proposizioni dimostrate (teoremi) è fondata soltanto sul fatto che esse sono state dedotte correttamente, con il pieno rispetto delle regole della logica; di qui il nome di «Sistema ipotetico-deduttivo» che viene dato alla Geometria in questo atteggiamento.

Si pone a questo punto, in modo naturale e spontaneo, una questione che potrebbe essere formulata domandando che senso abbia chiamare ancora «Geometria» un insieme di proposizioni che si presentano così astratte e staccate dalla realtà esteriore a noi. Infatti questa concezione della Geometria appare a prima vista molto lontana da quella tradizionale, e questa domanda è sostanzialmente coerente con la visione che l'umanità ha sempre tradizionalmente avuto della Geometria, a partire dall'opera immortale di Euclide.

Tuttavia il fatto che si continui a chiamare con il nome di Geometria una dottrina che può assumere l'aspetto di un puro gioco logico, e che non pretende di trarre i suoi principi e di fondare le sue basi sulla evidenza, e sulla rispondenza dei suoi principi ai dati della esperienza, è giustificato dalla esistenza di un secondo aspetto della Geometria; aspetto che viene descritto abbastanza bene dalla frase che asserisce essere la Geometria «il primo capitolo della Fisica». In altre parole, sotto questo secondo aspetto la Geometria ci si presenta come il primo passo che l'uomo compie per dare un ordine razionale alle sue esperienze ed alle osservazioni che egli esegue sul mondo reale. Nel caso della Geometria, tali osservazioni riguardano l'insieme delle relazioni spaziali dell'uomo con gli oggetti che lo circondano, ed i risultati delle manipolazioni che egli esegue su questi oggetti, immaginati come rigidi.

In questo ordine di idee, la Geometria riacquista parte del carattere di scienza di determinati oggetti, carattere che, come abbiamo visto, le è sempre stato attribuito durante i secoli precedenti al nostro. Si osservi tuttavia che, secondo questo modo di vedere, la Geometria assume anche lo stato epistemologico di una qualunque scienza della Natura, in particolare di una teoria fisico-matematica. Ora è stato osservato da Henri Poincaré che non ha senso domandarsi se una teoria cosiffatta sia vera oppure falsa: è possibile soltanto domandarsi se essa sia più o meno adeguata per descri-

David Hilbert (1862-1943).

vere le nostre esperienze passate, prevedere il risultato di altre e fornirci una visione razionale e coerente del mondo che ci circonda, sotto un determinato punto di vista.
Si potrebbe assimilare la conoscenza che così si ottiene a quella che si consegue utilizzando una carta topografica: è noto infatti che le informazioni fornite da una carta topografica non sono mai perfettamente esatte; si dimostra infatti che con un foglio piano ed inestendibile non si può «rivestire» perfettamente una parte di sfera, e meno che mai una intera sfera. Tuttavia, nonostante ciò, tutti noi utilizziamo le carte topografiche, per scopi pratici ed anche teorici.
Pertanto, sempre nella scia di Poincaré, noi pensiamo che, in questo ordine di idee, non abbia senso parlare di «Geometria vera»; infatti, ai fini di una descrizione coerente delle nostre esperienze nei riguardi degli oggetti che ci circondano, può essere sufficiente utilizzare la costruzione teorica di Euclide; ma può anche essere necessario utilizzare delle teorie più complicate e sofisticate, a seconda degli scopi dell'indagine che si sta compiendo e dell'ordine di approssimazione delle informazioni che si hanno e di quelle che si vogliono ottenere con le deduzioni ed i calcoli.
Quindi, sempre in questo ordine di idee, non si può pretendere che il cosiddetto «rigore geometrico» sia inteso come aderenza totale di certi enunciati a certe realtà materiali; ma esso deve venir interpretato come coerenza delle procedure deduttive che collegano logicamente i punti di partenza non dimostrati con le proposizioni che si dimostrano (teoremi).
Osserviamo infine che anche nell'atteggiamento moderno è necessario partire da un certo numero di proposizioni non dimostrate, da chiamarsi «postulati» oppure anche (secondo l'abitudine invalsa recentemente) «assiomi». La posizione moderna differisce dalla concezione classica nel fatto che tali proposizioni non si considerano imposte da una evidenza empirica considerata come inconfutabile, ma sono soltanto suggerite dalla esperienza; è quindi possibile, in linea di principio, scegliere diverse proposizioni come punti di partenza di una medesima teoria, che risulterebbe comunque sempre ugualmente valida e rigorosa.

L'assetto moderno della Matematica. Il metodo assiomatico

Ciò che abbiamo detto nelle pagine precedenti ci apre la strada alla esposizione dell'assetto moderno della Matematica; assetto che è il punto di arrivo naturale dell'evoluzione di cui abbiamo detto brevemente.
Una delle conseguenze più importanti di tale evoluzione è stata la constatazione del fatto che non è possibile definire ogni concetto di cui si parla; e ciò soprattutto in una teoria come la Matematica, che concettualizza e razionalizza le esperienze più immediate che l'uomo esegue nel contatto con la realtà esterna. Tali esperienze sono per esempio quelle che ci conducono a contare gli elementi di un insieme finito che percepiamo, oppure a constatare le posizioni reciproche degli oggetti che ci circondano o la nostra situazione rispetto ad essi.
Per queste ragioni abbiamo detto sopra che le frasi, che Euclide scrive all'inizio del suo trattato, e che riguardano gli oggetti della Geometria, sono delle descrizioni di questi oggetti, e non delle definizioni nel senso rigoroso ed esatto della logica.
È facile infatti constatare che non si può definire ogni concetto con un insieme di frasi: per esempio, quando si volesse comunicare con una persona che non conosce la nostra lingua, e della quale non conosciamo la lingua, occorre partire con quelle che vengono chiamate «definizioni ostensive» e che in latino venivano chiamate «definizioni per additamentum». In questo modo i significati dei vocaboli vengono precisati pronunciando di volta in volta un vocabolo ed insieme additando l'oggetto del quale il vocabolo è nome; oppure eseguendo una azione e pronunciando contemporaneamente il verbo che la designa.
Tuttavia pare chiaro che, nel caso di una scienza che tratta di concetti astratti, come la Matematica, non sia possibile la designazione materiale degli oggetti che si prendono in considerazione. Pertanto, nel caso dei concetti della Matematica, si fa ricorso alle definizioni che vengono chiamate «implicite» o anche «definizioni d'uso» o anche infine «definizioni per postulati». Con queste procedure si enunciano delle proposizioni che contengono i termini che si vogliono definire; la definizione dei termini e la precisazione del loro significato discende dall'uso che viene fatto dei termini stessi nelle proposizioni enunciate.
Queste sono ovviamente date senza dimostrazione, e vengono oggi chiamate abitualmente «assiomi», anche se il termine, in questo caso, ha un significato diverso da quello che gli viene attribuito nel linguaggio comune. Infatti nell'uso quotidiano il termine «assioma» viene spesso utilizzato per indicare una proposizione che viene ritenuta evidente, indiscutibile; invece, nell'uso che se ne fa oggi in Matematica e nelle scienze ad essa collegate, il termine «assioma» indica semplicemente una proposizione che viene enunciata all'inizio di una teoria, e che pertanto non può essere dimostrata, rimanendo all'interno della teoria stessa. Non si prende posizione a proposito dell'aderenza delle proposizioni ad una qualunque realtà esteriore.
In altre parole, in questo ordine di idee, gli assiomi non fanno che circoscrivere il significato dei termini che si utilizzano; la situazione è un poco analoga a quella che si presenta quando si insegna a qualcuno un gioco con le carte: ovviamente il nome che si dà a ciascuna carta non costituisce una definizione di questa, in relazione ad un determinato gioco: infatti la definizione di una carta è fornita dalle regole del gioco che si sta insegnando, e risulta quindi completa soltanto quando è stata enunciata l'ultima di tali regole. Inoltre non vi è alcuna contraddizione nel fatto che una medesima carta, per esempio il Re, abbia valori diversi in diversi giochi; infatti la definizione della carta è data, ripetiamo, dalle regole e quindi risulta diversa quando diverse sono le regole.
Questo atteggiamento pone dei problemi logici ed epistemologici di grande importanza e di notevole difficoltà; non ci è possibile trattarne qui in modo completo, e pertanto ci limiteremo a ricordare la loro esistenza ed a darne qualche sommario cenno.
Il più importante di questi problemi è quello di garantire la coerenza complessiva delle proposizioni che sono state enunciate come assiomi. Infatti è chiaramente necessario che tali proposizioni, nel loro insieme, non contengano alcuna contraddizione; altrimenti non sarebbe possibile costruire alcuna teoria coerente fondandosi su di esse.
Ovviamente una questione cosiffatta non si pone neppure quando si adotta l'atteggiamento classico, secondo il quale le proposizioni iniziali di una teoria si considerano dettate dalla esperienza immediata e fondate sulla evidenza; cioè quando si presume che le proposizioni abbiano una aderenza immediata e completa ad una realtà esteriore; infatti in questo caso la realtà sarebbe garante dell'assenza di contraddizione. Ma questa garanzia cessa quando si rinuncia a fare riferimento ad una realtà esteriore.
Una via possibile per rispondere al problema di cui stiamo parlando è quella di esibire un insieme di enti la cui natura ed il cui comportamento siano descritti dagli assiomi enunciati; un insieme cosiffatto viene spesso chiamato un

«modello» della teoria che si sta costruendo. Gli enti esibiti possono appartenere all'universo materiale, oppure ad un determinato capitolo della Matematica, diverso da quello che si sta costruendo.
Si potrebbe pensare che procedimenti cosiffatti non siano completamente al riparo da critiche: infatti mentre si cerca di superare il ricorso alla osservazione della realtà nella costruzione del sistema di assiomi, si ricade nella osservazione della realtà quando si tratti di garantire la coerenza del sistema di assiomi che si costruisce. Si osserva tuttavia che la realtà a cui si fa riferimento per garantire la coerenza del sistema di assiomi che si costruisce può essere oggetto di osservazioni o di esperienze molto più fondamentali, semplici ed elementari di quelle che in passato venivano assunte come punti di partenza della Geometria in particolare e della Matematica in generale. È chiaro inoltre che quando il modello sia costruito mediante enti presi da un capitolo della Matematica diverso da quello che si sta costruendo tale capitolo deve essere stato fondato in modo autonomo, altrimenti si cadrebbe in una situazione che la logica classica chiamava «circolo vizioso».
Un altro problema notevole che si incontra quando si adotti l'atteggiamento di cui abbiamo detto riguarda la unicità dell'insieme di enti reali che possono essere scelti per garantire la coerenza del sistema di assiomi enunciati.
Questo problema viene spesso chiamato problema della «categoricità» del sistema di assiomi considerato. Per esempio, quando si costruisce un sistema di assiomi atto a fondare l'Aritmetica dei numeri naturali, ci si può porre il problema se l'insieme dei numeri che noi conosciamo e maneggiamo per i calcoli quotidiani sia l'unico che incarna nella realtà il sistema di assiomi che si enunciano. Non possiamo qui soffermarci ulteriormente su questi problemi.

La questione dei fondamenti dell'Aritmetica e della Geometria

I problemi logici di cui abbiamo detto brevemente riguardano da vicino la questione dei fondamenti della Matematica; in particolare i fondamenti della Geometria e dell'Aritmetica, dottrine che, come abbiamo detto, sono sempre state considerate come le branche fondamentali della Matematica classica.
Per quanto riguarda l'Aritmetica, ricordiamo che il matematico italiano Giuseppe Peano pubblicò nel 1882 una celebre memoria, scritta in latino, intitolata «Arithmetices principia nova methodo exposita» (I principi dell'Aritmetica esposti con un nuovo metodo). In questa memoria Peano diede una soluzione rigorosa e completa del problema della definizione del concetto di numero naturale e delle operazioni sui numeri.

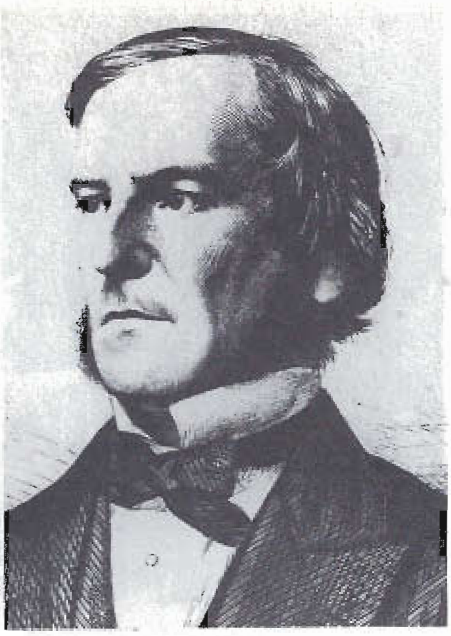
Il «club dei matematici» a Gottinga nel 1912. Riconoscibili David Hilbert e Felix Klein.

Nel sistema di assiomi elaborato da Peano non viene definito direttamente il numero, coerentemente con ciò che abbiamo detto poco sopra; in altre parole, non si incontra nell'opera di Peano una frase del tipo: «il numero è...». Invece Peano enuncia un insieme di assiomi che parlano del numero, in modo tale che la definizione di questo concetto discende implicitamente dal sistema di assiomi enunciato.
Questo sistema di assiomi, enunciati da Peano, non è l'unico che possa consentire una fondazione rigorosa dell'Aritmetica; esso è tuttavia quello più frequentemente ricordato nella letteratura matematica, ed è stato oggetto di numerose discussioni ed analisi.
Elaborazioni analoghe sono state fatte per quanto riguarda i fondamenti della Geometria; in questo campo sono da ricordare in Italia le opere dello stesso Peano e del suo allievo Mario Pieri; in Germania il grande matematico David Hilbert scrisse, nel primo decennio di questo secolo, un'opera fondamentale, intitolata «Grundlagen der Geometrie» (Fondamenti della Geometria), in cui i concetti geometrici ed i teoremi fondamentali sono presentati secondo la metodologia che abbiamo esposto. Per esempio, il trattato di Hilbert non incomincia con una frase che voglia essere la definizione o la descrizione del punto (come avviene per gli Elementi di Euclide) ma inizia con la frase seguente: «Consideriamo tre sistemi di enti: quelli del primo sistema saranno chiamati "punti", quelli del secondo saranno chiamati "rette", quelli del terzo saranno chiamati "piani"...». E prosegue così, enunciando delle proposizioni che legano tra loro questi concetti, e che forniscono così la definizione implicita.
Non possiamo qui approfondire ulteriormente i problemi logici ed epistemologici che nascono da questa impostazione dei fondamenti della Matematica. Ci limitiamo a ricordare anzitutto che questa metodologia a proposito dei fondamenti non è il risultato di una ricerca arbitraria ed esasperata della astrattezza e del rigore formale da parte dei matematici, ma è una conseguenza della evoluzione critica che la Matematica ha vissuto nel secolo scorso. Pertanto il voler evitare questa impostazione metodologica significherebbe voler riportare la Matematica all'assetto che essa aveva alla fine del secolo XVIII.
In secondo luogo osserviamo che questa metodologia rappresenta oggi una specie di quadro di riferimento ideale, al quale si ispira ogni sistemazione teorica della scienza, quando essa voglia tendere alla chiarezza ed al rigore. In altre parole il metodo assiomatico tende a diventare oggi il metodo della conoscenza scientifica; secondo questo metodo ogni scienza dovrebbe enunciare chiaramente, all'inizio di ogni esposizione teorica, i punti di partenza che essa ha scelto, e che ovviamente non può dimostrare, per il fatto stesso che sono punti di partenza. Ogni altra proposizione dovrebbe essere rigorosamente dimostrata.
Le proposizioni che vengono enunciate senza dimostrazione all'inizio della esposizione di ogni teoria sono dette assiomi della teoria stessa. Si noti tuttavia che assegnando questo nome a tali proposizioni non si intende imporle all'ascoltatore od al lettore; si vuole soltanto chiarire esplicitamente quali siano i punti di partenza che sono stati scelti. Si otterrebbe così, fra l'altro, il risultato di evitare ogni contesa successiva sul significato dei termini che si adottano o sulle circostanze che sono state tacitamente considerate come evidenti, e che spesso vengono invocate nelle discussioni, senza peraltro che siano state presentate coscientemente ed esplicitamente come tali.
Ovviamente non è detto che ogni scienza possa giungere ai livelli ideali di chiarezza e rigore posseduti dalla Matematica. Infatti gli oggetti di quest'ultima scienza si prestano in modo particolare a queste impostazioni metodologiche, laddove gli oggetti delle altre scienze possono presentare notevoli difficoltà

ed oscurità. Ma ciò non impedisce di pensare che la Matematica fornisca, in questo ordine di idee, il quadro ideale di sistemazione logica del sapere scientifico.

Alcuni aspetti della Matematica di oggi

Nelle pagine precedenti abbiamo cercato di spiegare che la Matematica, nella sua concezione moderna, non viene più considerata come una scienza determinata e definita dai suoi oggetti: i numeri, la quantità, lo spazio, l'estensione o qualunque altro ente sia stato designato nel passato come oggetto della scienza matematica. A nostro parere invece questa viene caratterizzata piuttosto dalle sue procedure che dai suoi oggetti. Non possiamo pretendere di dare qui un quadro completo della Matematica nei suoi sviluppi più moderni; dobbiamo quindi limitarci a dare qualche cenno dei momenti fondamentali della costruzione del pensiero matematico.
E faremo ciò avendo di mira il lavoro didattico, per l'insegnamento della Matematica e delle scienze collegate, e soprattutto per poter progettare degli itinerari didattici che aiutino gli insegnanti a conferire una cultura piuttosto che un insieme di nozioni. Questo dovrebbe infatti essere lo scopo dell'insegnamento di ogni dottrina, ed in particolare della Matematica, secondo le idee che abbiamo cercato di esporre e che presentano la Matematica come una struttura portante del sistema scientifico moderno.
Nel seguito ci occuperemo di riflettere, anche se potremo farlo soltanto in modo sommario, sulla genesi psicologica dei concetti della Matematica. Ma non possiamo evitare di soffermarci qui su questi problemi nella misura in cui essi sono collegati con l'argomento che vorremmo qui sviluppare.
Senza voler entrare in discussioni di carattere filosofico, pensiamo di poter dire che l'esperienza concreta, che parte dalle osservazioni fatte con i nostri sensi, è alla radice della costruzione delle nostre idee. Le quali tuttavia hanno un carattere del tutto diverso da quello della esperienza materiale da cui traggono origine. In particolare, come abbiamo già detto ripetutamente, per quanto riguarda la Matematica pensiamo di poter fissare la nostra attenzione su due tipi di esperienze: un primo tipo riguarda la considerazione di insiemi finiti di oggetti, ed il secondo riguarda le esperienze sulla nostra posizione rispetto agli oggetti che ci circondano e la mutua posizione di tali oggetti.
Le esperienze del primo tipo danno luogo ad operazioni elementari che tutti conosciamo, e che sfociano nella operazione di contare gli oggetti degli insiemi considerati. Possiamo osservare che in quasi tutte le lingue che si conoscono esistono dei vocaboli che indicano



George Boole (1815-1864).

quei numeri che vengono chiamati «interi naturali»; anzi, in moltissime lingue vi sono due serie di vocaboli cosiffatti: alcuni di essi prendono in considerazione soltanto la numerosità degli insiemi che si considerano, e vengono chiamati «numeri cardinali». In italiano abbiamo i vocaboli «uno, due, tre. ecc...». Altri vocaboli indicano anche un determinato posto che l'elemento considerato ha in un certo ordinamento; in italiano abbiamo i vocaboli: «primo, secondo, terzo, ecc...».
Le esperienze del secondo tipo riguardano, come abbiamo detto, la posizione del soggetto che parla rispetto agli oggetti che lo circondano e le mutue posizioni degli oggetti stessi tra loro.
Ritorneremo in seguito esplicitamente a riflettere sulla genesi psicologica dei concetti che riguardano questi due tipi di esperienze. Ci interessa qui fare qualche osservazione, che ci aiuterà nel cammino verso la comprensione di alcuni caratteri della Matematica.
In primo luogo possiamo osservare che, partendo da queste osservazioni materiali ed elementari la nostra mente costruisce dei concetti, che hanno carattere astratto e generale. Così per es. dalla osservazione di coppie di oggetti, la nostra mente costruisce il concetto astratto del numero «due», che viene detto con verità di ognuna delle coppie che si considerano, anche se non si identifica con alcuna di esse.
Analogamente dalla osservazione di certi oggetti e dalla elaborazione che la fantasia opera sulle osservazioni fatte, la nostra mente costruisce le immagini ed i concetti di «linea, superficie, punto». Anche questi concetti sono astratti e generali, perché noi abbiamo chiara coscienza del fatto che essi possono essere applicati a moltissimi oggetti materiali, e siamo anche coscienti del fatto che nessun oggetto materiale può incarnare, in modo assolutamente preciso, il concetto che viene espresso con un determinato termine.
Questi concetti che la nostra mente forma sono espressi con vocaboli del linguaggio comune, oppure con determinati simboli. Nel caso della Geometria, e nella concezione classica abituale, i concetti venivano rappresentati, come è noto, con parole del linguaggio comune; tuttavia era ben chiaro, come abbiamo detto poco fa, il fatto che nessun oggetto materiale realizza concretamente fino in fondo il concetto espresso dal termine che si pronuncia. Questo pertanto viene utilizzato in un senso preciso e convenzionale, diversamente da quanto si fa quando lo si adopera nel linguaggio comune, nel quale quasi ogni termine ha molti significati, ed il significato di un termine viene precisato (quando è possibile) dal contesto del discorso.
L'evoluzione secolare della Matematica ha messo in chiara evidenza le necessità di univocità semantica del linguaggio scientifico. Tali necessità hanno dato luogo alla creazione di un complesso di simboli artificiali e convenzionali per rappresentare i concetti astratti della Matematica; di conseguenza questa scienza oggi è praticamente incomprensibile se non si accetta di familiarizzarsi con un simbolismo convenzionale, che per qualche soggetto può essere abbastanza scostante e comunque difficile da apprendersi.
Guardando alla evoluzione storica, possiamo osservare che per esempio il sistema romano per rappresentare i numeri interi era abbastanza naturale, ma si prestava molto male per rappresentare numeri molto grandi e ancora meno si prestava per eseguire le operazioni su numeri. Non possiamo nasconderci il fatto che l'introduzione in Occidente delle convenzioni arabe per rappresentare i numeri (convenzioni che gli Arabi avevano preso dagli Indiani, come è noto) ha costituito un momento essenziale per il progresso scientifico del nostro mondo.
Tra i vantaggi offerti dalla rappresentazione dei numeri mediante le convenzioni arabo-indiane due ci sembrano avere una particolare importanza: anzitutto la possibilità di rappresentare numeri comunque grandi utilizzando soltanto 10 simboli elementari (le cifre). Tale rappresentazione è resa possibile dalla cosiddetta convenzione posizionale, in base alla quale, come è noto, il numero rappresentato da una determinata cifra dipende dalla posizione che la cifra stessa ha nel simbolo globale che si scrive.
In secondo luogo le operazioni sui numeri sono eseguibili in modo rapido e sicuro, con procedure fisse; queste sono indipendenti dal significato che si dà ai numeri in un determinato problema, e sono talmente automatiche che esse vengono oggi fatte eseguire da opportuni apparati meccanici o elettronici, i quali ovviamente non sono in grado di capire il significato dei simboli, sui quali tuttavia operano con perfetta sicurezza e coerenza.
Si ottiene così una grandissima astrazione e generalità delle rappresentazioni dei concetti che si manovrano, e soprattut-

to una estrema sicurezza delle deduzioni. Infatti quando si esegue un determinato calcolo si esegue una particolare deduzione, ed il risultato di un calcolo può legittimamente essere considerato come la conseguenza di un ragionamento, eseguito in modo assolutamente perfetto. In questo ordine di idee, il matematico G. Peano ha avuto ragione di scrivere che «la Matematica è una logica perfezionata».

Abbiamo affermato che il dominio della Matematica, nella sua concezione odierna, si estende molto al di là dell'insieme delle cose misurabili e quantificabili. Ciò che abbiamo detto poco sopra ci avvia a giustificare ed a comprendere il significato di questa nostra affermazione. Infatti è possibile costruire dei simboli convenzionali che rappresentino anche delle cose diverse dai numeri: per esempio si possono costruire dei sistemi di simboli che rappresentano delle operazioni su enti della Fisica o della stessa Matematica; oppure si possono costruire dei simboli per rappresentare le singole proposizioni di una teoria o le singole proposizioni di un linguaggio, naturale o artificiale. Un ramo oggi molto importante della Matematica, che viene spesso chiamato Algebra astratta, ma che sempre più frequentemente viene detto semplicemente Algebra, studia le leggi di composizione di simboli astratti ed insegna a costruire dei simboli composti a partire da certi simboli iniziali semplici. Spesso si dice che queste leggi costituiscono la «sintassi» dei simboli costruiti. Se a questi si danno dei significati in riferimento alla realtà, la costruzione di nuovi simboli in base alle leggi studiate e stabilite può assumere l'aspetto di un calcolo, che si può far eseguire da macchine meccaniche oppure elettroniche. Ma in relazione alla realtà che si rappresenta di volta in volta, il calcolo può assumere il significato di deduzione; le conclusioni di queste deduzioni sono assolutamente certe, nella misura in cui le leggi di trasformazione sono state tutte rispettate. Allo stesso modo noi siamo certi dei risultati di una operazione aritmetica, nella misura in cui le leggi delle operazioni sono state correttamente applicate.

Possiamo quindi concludere che la utilizzazione degli strumenti della Matematica permette all'uomo una grande precisione nella designazione degli enti che egli vuole studiare, ed una grande certezza nelle deduzioni delle conseguenze che scaturiscono da certi punti di partenza. È questa, a nostro parere, una delle ragioni del successo del metodo matematico nella Fisica, metodo che, dall'epoca di Galileo, ha quasi completamente soppiantato la descrizione verbale qualitativa delle cose e la deduzione con le leggi della logica classica.

Un secondo aspetto della descrizione matematica della realtà è costituito dalla grande astrattezza della teorizzazione matematica, astrattezza che permette una grande generalità e quindi anche una grande economia di pensiero. Per spiegare meglio il nostro pensiero, pensiamo ai numerosissimi fenomeni periodici che la Natura ci presenta: le oscillazioni del pendolo, le maree, le oscillazioni di un circuito elettrico, i cicli economici ecc. ecc. Tutti questi fenomeni, ed altri numerosissimi che nel futuro potranno attirare la nostra attenzione, sono tutti inquadrati in un unico schema matematico, il quale permette di dominare quegli aspetti che ci interessano, ovviamente dal punto di vista della variazione periodica degli enti che prendiamo in considerazione.

Formalizzazione e deduzione

Per gli scopi che abbiamo in vista conviene riflettere su certi aspetti della Matematica, oltre a quelli che abbiamo già considerato nei paragrafi precedenti. A tal fine osserviamo che la conoscenza scientifica si avvale di due operazioni concettuali di importanza fondamentale. La prima è la designazione precisa ed univoca degli oggetti di cui si parla, la seconda è la deduzione, che dia risultati il più certi possibile.

La riflessione, anche superficiale, sulle scienze moderne ci convince della verità di queste osservazioni; si può notare infatti che le scienze, modernamente intese, utilizzano in modo sempre più cospicuo dei simboli artificiali per designare i propri oggetti; la cosa è molto evidente nella Chimica, e per convincersi del significato di questa tendenza basta paragonare la precisione della designazione che oggi si ottiene con una formula, che dà la costituzione molecolare di una sostanza, con la descrizione qualitativa ed oscura che era utilizzata dagli alchimisti, del secolo XVIII e precedenti. In modo analogo, si può osservare che anche la Biologia sta avviandosi ad indagare il codice genetico dei viventi; si può quindi pensare non lontano il giorno in cui una determinata specie di viventi potrà essere pienamente identificata da una formula precisa, che traduce ciò che, per così dire, è scritto nei suoi cromosomi, piuttosto che con una descrizione qualitativa, basata sui caratteri esteriori, come siamo costretti a fare finora.

Nel caso della Fisica, ed in particolare della Meccanica, il processo di utilizzazione di un linguaggio preciso per la designazione degli oggetti che si studiano ha avuto inizio da Galileo, come abbiamo già detto nel paragrafo 1. Infatti la Fisica ha iniziato il suo cammino moderno da quando ha abbandonato la descrizione qualitativa degli enti e dei fenomeni per adottare la descrizione e la designazione matematica, che si ottiene con l'utilizzazione del linguaggio matematico. Questo permette, attraverso l'operazione di misura, di determinare con precisione le grandezze di cui si tratta (ovviamente dal punto di vista della Fisica) e di esprimere le relazioni tra di loro con grande chiarezza.

Pensiamo che già i vantaggi che abbiamo esposto fin qui bastino per giustificare l'adozione del linguaggio matematico nella descrizione degli oggetti della scienza. Ma questi vantaggi non sono i soli, né i più importanti. Possiamo infatti osservare che il linguaggio matematico è diretto da un insieme di regole sintattiche, le quali permettono di seguire le trasformazioni delle formule e delle espressioni, ottenendo altre formule ed altre espressioni che ne discendono con perfetta certezza; esse infatti sono ottenute in modo quasi automatico, e spesso possono essere affidate a dei sistemi fisici (macchine meccaniche oppure elettroniche), in modo da evitare il più possibile l'influenza dell'azione degli operatori sui risultati delle deduzioni.

Si pensi all'esempio più semplice, fornito dai calcoli aritmetici. La grande maggioranza di coloro che usano l'Aritmetica ha memorizzato negli anni infantili certe convenzioni per la rappresentazione dei numeri e per l'esecuzione delle operazioni su di essi, ed applica queste regole molto spesso senza saperle giustificare; oppure non ha mai conosciuto o ha dimenticato la loro giustificazione, ma le utilizza lo stesso con piena tranquillità sulla loro validità.

Ma abbiamo detto sopra che l'ambito della Matematica non si limita agli oggetti quantificabili o misurabili. Infatti la Logica formale moderna utilizza dei simboli per rappresentare i concetti o le proposizioni, senza il ricorso necessario al linguaggio comune. Con queste procedure, l'operazione di deduzione si esplica, ancora una volta, all'applicazione delle leggi della sintassi dei simboli inventati o scelti. Pertanto, anche in questo caso, l'operazione concettuale di deduzione si trasforma in un calcolo, cioè in una manipolazione di certi simboli secondo certe leggi, in modo del tutto analogo a ciò che avviene nel caso dei numeri studiati dall'Aritmetica.

Si rende quindi sempre più evidente l'aspetto che la Matematica assume in questi casi: precisamente l'aspetto di un linguaggio preciso e rigoroso, che permette di descrivere gli oggetti della scienza, di esprimere le relazioni tra essi, ed infine di eseguire le deduzioni con la massima certezza possibile **(Carlo Felice Manara,** ordinario di Istituzioni di Geometria superiore, Università di Milano**).**

Georg Cantor (1845-1918).