

Contributi alla teoria del consumatore. Coerenza e coerenza parziale

di Carlo Felice Manara

1. Introduzione

La teoria che cerca di descrivere e di spiegare, nei limiti del possibile, il comportamento del soggetto economico che viene chiamato «consumatore» è forse una delle più classiche: ricordiamo, a titolo di esempio, la trattazione che ne ha dato Vilfredo Pareto, applicando al problema del consumatore le note procedure che Lagrange aveva elaborato per la ricerca dei massimi o minimi condizionati delle funzioni di più variabili.

In questo lavoro intendiamo riprendere la questione utilizzando gli strumenti matematici offerti dalla teoria delle forme differenziali esterne.

A tal fine richiameremo per sommi capi la teoria classica, presentando poi le generalizzazioni che sono permesse dalla utilizzazione di strumenti i quali, per quanto classici per la matematica, sono tuttavia diversi da quelli abitualmente impiegati nella teoria economica. Questa utilizzazione ci permetterà di introdurre nelle nostre considerazioni il concetto di coerenza parziale, il quale, nelle nostre intenzioni, è destinato a generalizzare il concetto di coerenza; quest'ultimo concetto infatti potrebbe essere utilizzato per descrivere il comportamento del consumatore nei casi contemplati dalla teoria classica, (che, per intenderci, chiameremo paretiana) ma difficilmente può essere generalizzato rimanendo nell'ambito di questa teoria; crediamo invece che con l'impiego di strumenti matematici di potenza maggiore di quelli utilizzati dalla teoria paretiana sia possibile ampliare il concetto di coerenza, ed approfondire così l'analisi del comportamento del consumatore con strumenti matematici.

Osserviamo infine che, a nostro parere, le procedure che introdurremo possono essere utilmente adottate anche in altri capitoli della teoria economica, permettendo così una visione più ampia e profonda dei problemi ivi trattati.

2. La teoria classica.

Nel seguito di questo nostro lavoro utilizzeremo metodicamente il linguaggio geometrico, che è comodo e suggestivo per l'esposizione; tuttavia è appena necessario osservare che questa convenzione non è lesiva della generalità e pertanto siamo convinti che essa non possa presentare difficoltà di interpretazione nei riguardi dei problemi di teoria economica dei quali ci occupiamo qui.

Indichiamo con X uno spazio euclideo reale ad n dimensioni (con $n \geq 3$); l'ipotesi che lo spazio sia euclideo ci permetterà di esprimere comodamente e sinteticamente certe relazioni, il cui significato, ripetiamo, rimarrà esclusivamente economico.

Scriveremo convenzionalmente:

$$(2.1) \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_n].$$

per indicare che il punto x ha per coordinate i numeri (reali) x_1, x_2, \dots, x_n .

Indicheremo col simbolo X' il sottinsieme dei punti di X che hanno tutte le coordinate positive; porremo quindi:

$$(2.2) \quad X' = \{x \in X \mid x_i > 0, 1 \leq i \leq n\}.$$

Indichiamo con A un insieme aperto, semplicemente connesso e limitato, contenuto in X' ; si avrà quindi:

$$(2.3) \quad A \subset X'$$

Con le coordinate x_i , ($1 \leq i \leq n$) indicheremo le quantità di merci o beni che un dato consumatore può acquistare.

È noto che nella teoria classica, paretiana, del consumatore, si suppone che esista una funzione indice di utilità (o di ofelimità, secondo la terminologia di Pareto); indicheremo qui tale funzione con u , e supporremo che essa abbia valori reali e sia definita e continua nell'aperto A . Si avrà quindi:

$$(2.4) \quad u: A \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto u(x).$$

Come è noto, si può supporre che la funzione $u(x)$ sia tale da stabilire una corrispondenza tra l'insieme A e la retta reale \mathbb{R} in modo che l'ordinamento totale che sussiste in \mathbb{R} permetta di isti-

tuire un ordinamento totale anche nell'aperto A . Pertanto, dati due punti x, y di A , si suol dire che la situazione di possesso di beni indicata dalle coordinate di x è preferita dal consumatore a quella indicata dalle coordinate di y se e soltanto se si ha:

$$(2.5) \quad u(x) > u(y).$$

Un insieme dei punti di A per i quali si abbia:

$$(2.6) \quad u(x) = \text{costante}$$

viene chiamato «varietà di indifferenza», per evidenti ragioni.

Tralasciamo di soffermarci sulle discussioni riguardanti il significato del valore numerico preso dalla funzione u in un punto x di A , e ci limitiamo a ricordare che, quando sia data una funzione di ofelimità che svolga le funzioni attribuite qui alla u , anche un'altra qualunque funzione:

$$(2.7) \quad F[u(x)],$$

dove F è una funzione continua, monotona e crescente in senso stretto, può essere assunta come funzione indice di utilità (ofelimità).

La corrispondenza stabilita dalla funzione u tra l'aperto A e la retta reale R trasforma quindi la relazione di preferenza tra due situazioni indicate da due punti x ed y nel confronto tra i valori reali presi dalla funzione u nei punti stessi; e la esistenza di un ordinamento totale sulla retta reale permette di concludere che la relazione di preferenza così stabilita possiede le proprietà seguenti:

a) due situazioni, corrispondenti a due punti x ed y di A , sono sempre confrontabili tra loro: in altre parole, il consumatore (che traduce le sue preferenze con i valori della funzione u) è sempre in grado di determinare se la situazione indicata dalle coordinate del punto x è per lui indifferente a quella indicata dalle coordinate di y ; oppure se egli preferisce una situazione all'altra;

b) se una situazione corrispondente alle coordinate di x è preferita a quella corrispondente alle coordinate di y , e questa a sua volta è preferita a quella corrispondente alle coordinate di un punto z , allora la situazione corrispondente alle coordinate di x è preferita a quella corrispondente a z . Con linguaggio matematico, si suol dire che in questo caso la relazione di preferenza, stabilita così dalla funzione di utilità, possiede la proprietà transitiva.

Converremo di dire che il consumatore che stabilisce le proprie preferenze nel modo descritto è «globalmente coerente» nell'aperto A .

3. La funzione di utilità

Per gli scopi della trattazione matematica si suole supporre che la funzione u di utilità possieda certe proprietà, che permettono la formulazione di certi problemi e la loro risoluzione con gli strumenti dell'analisi matematica. Le proprietà che supporremo valide per la funzione u sono le seguenti:

a) nell'aperto A la u possiede derivate prime e seconde, e queste ultime sono continue in tutto l'aperto A . Adottando il vocabolario dell'analisi matematica, si usa dire che in tutto l'aperto A la funzione u è di classe di derivabilità almeno 2.

Nel seguito, per brevità, adoteremo per le derivate parziali prime e seconde della funzione u le notazioni seguenti:

$$(3.1) \quad u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

ed anche:

$$(3.2) \quad u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$$

In forza di classici teoremi di analisi matematica, si conclude che le ipotesi supposte valide per la funzione u permettono di assicurare che per le derivate seconde parziali della u valgono le relazioni:

$$(3.3) \quad u_{ik} = u_{ki} \quad (1 \leq i, k \leq n).$$

b) nell'aperto A le ipersuperfici di indifferenza, rappresentate dalle equazioni:

$$(3.4) \quad u = \text{cost.}$$

sono convesse in senso stretto. Di conseguenza, considerati due punti x, y di A , e considerati due numeri reali a e b che soddisfino alle condizioni seguenti:

$$(3.5) \quad a > 0, b > 0, a + b = 1,$$

ponendo:

$$(3.6) \quad z = a x + b y,$$

si ha sempre:

$$(3.7) \quad u(z) > u(x) \quad , \quad u(z) > u(y).$$

4. Le equazioni di Lagrange-Pareto

Come è noto, le ipotesi enunciate nel precedente paragrafo per la funzione u permettono di tradurre il problema del consumatore con il linguaggio dell'analisi matematica, e di risolvere il problema stesso con gli strumenti escogitati da Lagrange per la ricerca di valori estremali condizionati delle funzioni di più variabili.

A tal fine si suppone che esista un vettore \mathbf{p} , che chiameremo vettore dei prezzi, le cui componenti sono i prezzi delle merci e dei beni che sono sul mercato e quindi sono acquistabili dal consumatore:

$$(4.1) \quad \mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_n].$$

Indichiamo poi con un numero reale non negativo R la spesa globale del consumatore, cioè la quantità di numerario che questi destina all'acquisto dei beni disponibili. Si avrà pertanto la relazione fondamentale:

$$(4.2) \quad R = \sum_i p_i x_i,$$

che esprime la spesa globale destinata dal consumatore all'acquisto dei beni.

Da questa equazione, che viene spesso chiamata «relazione di bilancio», si deduce la:

$$(4.3) \quad \frac{\partial R}{\partial p_i} = x_i$$

alla quale faremo riferimento nel seguito.

Ammettiamo ora che il comportamento del consumatore tenda a cercare il punto x in corrispondenza al quale è massimo il valore di u , quando sia fissata la somma R , oppure a rendere minima la somma R quando sia fissato il valore della funzione u . Nel seguito diremo che la precedente proposizione esprime l'ipotesi fondamentale del comportamento del consumatore, beninteso quando esista una funzione di utilità.

Traducendo con gli strumenti dell'analisi matematica l'ipotesi enunciata, si giunge a scrivere il sistema di equazioni (che diremo di Lagrange):

$$(4.4) \quad \begin{cases} u_i = h p_i \\ R = \sum_i p_i x_i \end{cases}$$

dove h è un numero reale, che viene abitualmente chiamato «moltiplicatore di Lagrange». L'eliminazione di h tra le equazioni della prima riga delle (4.4) conduce al sistema di equazioni:

$$(4.5) \quad p_i u_k - p_k u_i = 0 \quad (1 \leq i, k \leq n).$$

Queste sono in numero di $n(n-1)/2$, ma ovviamente soltanto $(n-1)$ tra loro sono linearmente indipendenti.

Il sistema costituito dalle equazioni (4.5) e dalla seconda delle (4.4) permette, nelle ipotesi poste, di considerare le p_i come funzioni delle x_k o queste ultime come funzioni delle p_i , nell'aperto A , quando siano valide le ipotesi enunciate e quando il consumatore regoli il proprio comportamento secondo l'ipotesi fondamentale enunciata poco sopra.

In particolare quindi è possibile considerare certe n funzioni:

$$(4.6) \quad x = f_i(p \mid R)$$

le quali esprimono le quantità dei beni acquistate dal consumatore nelle ipotesi più volte enunciate, in funzione del vettore di prezzi p e della spesa globale R .

Come è noto, le funzioni (4.6) vengono richiamate con il nome ovvio di «funzioni di domanda del consumatore».

5. La faccetta di indifferenza

Impiegando il linguaggio geometrico convenzionale di cui abbiamo detto nel paragrafo 1, il contenuto delle relazioni espresse dalle formule (4.4) del precedente paragrafo può essere espresso dicendo che in ogni punto x dell'aperto A l'iperpiano rappresentato dalla seconda delle equazioni (4.4) è tangente alla ipersuperficie di indifferenza che passa per il punto, ed è anche ivi normale al vettore dei prezzi delle merci e dei beni.

Le stesse circostanze possono essere descritte anche utilizzando la terminologia della teoria delle trasformazioni di contatto, dicendo che in ogni punto di A è data una «faccetta di indifferenza» per il consumatore; tale faccetta può essere rappresentata nel modo seguente: si consideri il polinomio lineare nei differenziali dx , dato da:

$$(5.1) \quad \pi = \sum_i p_i dx_i.$$

Questo polinomio lineare viene anche chiamato «forma di Pfaff» o anche brevemente «pfaffiano». Usando il linguaggio suggestivo dei differenziali, si può dire che il valore del pfaffiano π rappresenta la spesa (infinitesima) che il consumatore deve fare per cambiare la propria situazione, spostandosi, a prezzi costanti, dal punto x di A ad un punto le cui coordinate sono accresciute (ovviamente in senso algebrico, cioè eventualmente anche con incrementi negativi) delle quantità dx .

La equazione:

$$(5.2) \quad \pi = \sum_i p_i dx_i = 0$$

traduce la condizione che lo spostamento infinitesimo sia tangente all'ipersuperficie di indifferenza, e quindi avvenga ad utilità costante.

L'equazione (5.2) viene chiamata equazione di Pfaff, o anche equazione ai differenziali totali; essa sarà presa in considerazione

nel seguito di questo lavoro, nello spirito e con i metodi di una teoria classica, che tratta le equazioni singole di questo tipo ed anche i sistemi di equazioni cosiffatte.

Anticipiamo qui alcune osservazioni, che giustificano il presente lavoro e le parole con le quali esso è stato presentato nel paragrafo 1.

Osserviamo anzitutto che l'equazione di Pfaff (5.2) consegue dalle ipotesi enunciate, cioè dalla esistenza di una funzione di utilità del consumatore e dal comportamento di questi secondo l'ipotesi fondamentale. In altre parole, in queste condizioni si possono prendere in considerazione delle funzioni di domanda, ed il comportamento del consumatore è globalmente coerente; il che significa che il consumatore può esprimere la preferenza (o l'indifferenza) di due situazioni corrispondenti a due punti x ed y di A , anche quando questi sono lontani tra loro. Invece la (5.2) traduce un comportamento del consumatore che riguarda soltanto situazioni molto vicine tra loro, e presuppone la esistenza soltanto di funzioni di domanda e non di funzioni globali di utilità. In altre parole, dalle ipotesi classiche si deduce la validità della (5.2), ma da questa non segue la validità delle ipotesi classiche; perché ciò avvenga occorre che siano verificate certe condizioni ulteriori, le quali, insieme con la (5.2), qualificano il comportamento globalmente coerente del consumatore. Se ciò non è, si può definire un concetto più ristretto di coerenza, come vedremo.

Osserviamo inoltre che, dal punto di vista delle applicazioni dei concetti che stiamo esponendo, ci pare più facile ed efficace l'escogitare delle procedure di osservazione che mirano alla verifica della (5.2) che il costruire delle procedure per la verifica dell'esistenza di una funzione indice di utilità in tutto l'aperto A .

6. Le equazioni di Slutsky

Come abbiamo visto, la teoria classica paretiana fornisce la descrizione del comportamento del consumatore con il sistema di equazioni (4.4). Da queste equazioni discendono alcune relazioni che vengono chiamate «equazioni di Slutsky» e che si deducono con procedimenti di derivazione dalle equazioni ricordate. Le relazioni di Slutsky sono le seguenti:

$$(6.1) \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial x_i}{\partial R} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial x_k}{\partial R}$$

e per la loro dimostrazione rimandiamo ai manuali che trattano di economia matematica (si veda per es. Manara-Nicola, 1970).

A noi interessa qui dedurre queste relazioni nello spirito della teoria delle equazioni di Pfaff, di cui abbiamo detto nel paragrafo 5. A tal fine si può calcolare il differenziale esterno della forma di Pfaff π che è stata definita dalla (5.1) del paragrafo 5. Infatti, dalla (4.6), tenendo conto della (4.3) dello stesso paragrafo, e ponendo:

$$(6.2) \quad s_{ik} = \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + x_k \frac{\partial x_i}{\partial R}$$

si ottiene:

$$(6.3) \quad d\pi = \sum_{i < k} (s_{ik} - s_{ki}) dp_k \wedge dp_i.$$

Pertanto il sussistere delle relazioni di Slutsky implica che la forma differenziale pfaffiana π sia chiusa, cioè che si abbia:

$$(6.4) \quad d\pi = 0.$$

Viceversa, la teoria delle forme differenziali esterne assicura che, nelle ipotesi formulate per l'aperto A , il sussistere della (6.4) è anche condizione sufficiente perché l'equazione pfaffiana:

$$(6.5) \quad \pi = 0$$

sia completamente integrabile, cioè perché esista un fascio di ipersuperfici

$$(6.6) \quad u(x) = \text{costante}$$

tale che in ogni punto di A si abbia:

$$(6.7) \quad du = \pi.$$

Dalla teoria ricordata si ha inoltre che la condizione sufficiente per la completa integrabilità dell'equazione pfaffiana (6.5) si può esprimere in forma più generale, imponendo che esista una forma differenziale θ tale che si abbia:

$$(6.8) \quad d\pi = \pi \wedge \theta.$$

Pertanto, in questo ordine di idee, si può asserire che il sussistere delle relazioni di Slutsky è condizione non soltanto necessaria, ma anche sufficiente perché il comportamento del consumatore sia globalmente coerente nell'aperto A .

7. La coerenza parziale

Abbiamo visto che gli strumenti della teoria delle forme differenziali esterne presentano un interessante significato delle classiche equazioni di Slutsky in relazione alla coerenza del consumatore. Possiamo ora porci il problema di indagare quale sia il significato della situazione più generale, la quale si presenta quando esistono delle funzioni di domanda del consumatore, e si possa quindi costruire la forma pfaffiana π , ma le relazioni di Slutsky non siano soddisfatte.

Ovviamente in questo caso non esiste una funzione di utilità che possa servire come criterio di scelta con il quale il consumatore confronta due situazioni, e sulla quale egli fonda la coerenza delle proprie scelte. È possibile tuttavia prendere in considerazione, anche in questo caso, alcune caratteristiche del comportamento del consumatore, le quali permettono di introdurre un concetto per così dire attenuato di coerenza.

A tal fine ricordiamo che, anche quando non vale la (6.8), è possibile determinare un intero p soddisfacente alla limitazione:

$$(7.1) \quad 2p \leq n - 1$$

ed esistono $2p$ funzioni:

$$(7.2) \quad z_1, z_2, \dots, z_p, v_1, v_2, \dots, v_p$$

tali che il polinomio di Pfaff π può essere espresso nella forma seguente:

$$(7.3) \quad \pi = du + z_1 dv_1 + z_2 dv_2 + \dots + z_p dv_p.$$

Si trae da qui che l'equazione pfaffiana $\pi = 0$ è verificata sulla varietà ad $n - p - 1$ dimensioni definita dalle equazioni:

$$(7.4) \quad u = c \text{ (costante); } v_i = c_i \text{ (} 1 \leq i \leq p \text{)}.$$

Tale varietà può quindi essere considerata come la immediata generalizzazione della varietà di indifferenza della teoria classica paretiana, e potrebbe essere chiamata varietà di indifferenza limitata o parziale.

Si osserva inoltre che le (7.4) costituiscono un sistema di $p + 1$ equazioni in termini finiti, che legano le coordinate di un punto x appartenente all'aperto A ; esistono quindi $p + 1$ varietà ad $n - p$ dimensioni, ognuna delle quali viene rappresentata da p equazioni scelte tra le (7.4). Una di queste, per esempio, è definita dalle equazioni:

$$(7.5) \quad v_i = c_i \text{ (} 1 \leq i \leq p \text{)};$$

su questa varietà varia soltanto la funzione u , la quale pertanto, con i suoi valori, può servire come criterio di confronto al consumatore tra due situazioni. Pertanto si può parlare di coerenza debole, o coerenza parziale del consumatore, il quale decida di rimanere su una varietà definita dalle equazioni (7.5) e regoli le sue scelte sul valore che la funzione u prende (beninteso in punti della varietà considerata). Analoghe considerazioni valgono ovviamente per ognuna delle altre varietà definite, come si è detto, da p equazioni scelte tra le (7.5).

Facendo riferimento al linguaggio della teoria delle trasformazioni di contatto, di cui abbiamo detto nel capitolo precedente, si suol dire che, se l'equazione di Pfaff (6.5) è completamente integrabile, le faccette di indifferenza si possono organizzare in modo da essere tutte tangenti alle ipersuperfici di un fascio del tipo (6.6). Se invece l'equazione di Pfaff non è completamente integrabile, le faccette si possono organizzare in modo da essere tangenti a certe varietà di dimensione minore di $(n - 1)$.

8. Osservazioni

Concludiamo le nostre considerazioni con alcune brevi osservazioni sul significato e sulla eventuale portata degli sviluppi teorici che precedono.

Anzitutto vorremmo osservare che abbiamo fatto riferimento qui al problema classico del consumatore soltanto per fissare le idee, ed evitare la eccessiva astrattezza di una trattazione troppo

generale, che rischia di essere giudicata eccessivamente lontana dalle possibilità di applicazione ai problemi reali dell'economia. In verità sarebbe abbastanza agevole estendere i concetti e gli sviluppi da noi qui presentati a problemi molto più generali: infatti è possibile applicare ciò che è stato esposto a molte altre problematiche economiche.

Il primo esempio che si presenta alla nostra attenzione, in questo ordine di idee, è quello fornito dalla teoria della produzione, quando i suoi problemi vengano schematizzati matematicamente con la ricerca della ottimizzazione del profitto sotto determinati vincoli. Ma crediamo che, nello stesso ordine di idee da noi qui presentato, si possano trattare anche numerosi altri problemi riguardanti i sistemi economici, quando i problemi stessi siano formulati come ricerca di valori estremali condizionati di certe funzioni.

In secondo luogo crediamo che nelle linee dell'impostazione da noi qui data si possa cercare di colmare le distanze che sembrano separare i vari punti di vista dai quali sono affrontati certi problemi economici. Infatti alcune impostazioni matematiche appaiono molto eleganti allo specialista matematico, ma vengono criticate come eccessivamente astratte, perché presuppongono negli operatori economici una coerenza globale che raramente si presenta, oppure la capacità o la possibilità di confrontare situazioni spesso distanti tra loro. Tuttavia noi pensiamo che gli strumenti della matematica possano aiutare a schematizzare ed a trattare situazioni in cui si verifica soltanto una specie di coerenza limitata (vorremmo dire locale) degli operatori. Il che può anche essere giudicato come un passo verso una aderenza sempre maggiore degli strumenti teorici alla realtà che si vuole conoscere.

Appendice. Richiamo sulle forme differenziali esterne

1. La teoria delle forme differenziali esterne non è frequentemente impiegata nell'analisi economica: pertanto presentiamo qui alcuni cenni sommari che la riguardano. Come abbiamo già avvertito, adotteremo qui un linguaggio geometrico, che permette una certa agilità e concisione di espressione senza ledere la generalità. Le notazioni qui adottate non hanno riferimento alcuno con il significato che abbiamo dato ai simboli nei paragrafi precedenti.

Accanto allo spazio euclideo ad n dimensioni, in cui un punto x ha coordinate (reali):

$$(A.1) \quad x_1, x_2, \dots, x_n,$$

si consideri lo spazio vettoriale dei differenziali delle variabili. Porremo:

$$(A.2) \quad dx = [dx_1, dx_2, \dots, dx_n];$$

su questo spazio vettoriale dei differenziali costruiamo poi lo spazio ad $n(n-1)/2$ dimensioni i cui generatori sono le coppie ordinate di elementi dx_k e dx_i . Indicheremo con il simbolo:

$$(A.3) \quad dx_i \wedge dx_k$$

un elemento del secondo spazio vettoriale, elemento che penseremo ottenuto con una operazione che diremo di «prodotto alterno» dei due differenziali dx_k e dx_i . Tale prodotto viene indicato interponendo il simbolo « \wedge » tra i due differenziali, e ad esso si attribuisce una sintassi espressa dalle seguenti regole formali:

$$(A.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} dx_i \wedge dx_k + dx_k \wedge dx_i = 0 \quad \text{da cui} \\ dx_i \wedge dx_i = 0. \\ dx_i \wedge [a \cdot dx_k + b \cdot dx_j] = a \cdot dx_i \wedge dx_k + b \cdot dx_i \wedge dx_j \\ \text{con } a \text{ e } b \text{ numeri reali.} \end{array} \right.$$

2. Sia ora A un aperto semplicemente connesso dello spazio, ed indichiamo con $\mathbf{a}(x)$ un vettore le cui componenti sono funzioni del punto x di A :

$$(A.5) \quad \mathbf{a}(x) = [a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)].$$

Si suppone che le funzioni componenti del vettore \mathbf{a} abbiano almeno derivate prime e seconde in A , e che le derivate seconde siano continue.

Il polinomio di primo grado nelle dx_i :

$$(A.6) \quad \alpha = \sum_i a_i \cdot dx_i$$

viene chiamato anche «forma differenziale lineare» oppure forma di Pfaff.

Nelle ipotesi poste, è possibile costruire anche il polinomio di secondo grado (nelle variabili dx) espresso dalla formula:

$$(A.7) \quad d\alpha = \sum_k da_k \wedge dx_k,$$

dove il simbolo da_k indica il differenziale totale della funzione a_k cioè:

$$(A.8) \quad da_k = \sum_j \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \cdot dx_j.$$

Il polinomio $d\alpha$ dato dalla (A.7) viene chiamato «differenziale esterno» della forma pfaffiana α ; tenendo conto delle regole di sintassi del prodotto esterno, esso può essere scritto nella forma:

$$(A.9) \quad d\alpha = \sum_{j < k} \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_k} \right) dx_j \wedge dx_k.$$

3. Consideriamo il caso particolare in cui la forma di Pfaff data dalla (A.6) del paragrafo precedente esprime il differenziale totale di una funzione u ; si abbia cioè:

$$(A.10) \quad a_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

e quindi:

$$(A.11) \quad \alpha = du.$$

In questo caso si ha

$$(A.12) \quad d\alpha = \sum_{j < k} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right) dx_j \wedge dx_k$$

e quindi, supponendo che la funzione u abbia nell'aperto A derivate almeno seconde continue:

$$(A.13) \quad d\alpha = 0.$$

Una forma differenziale di Pfaff per la quale vale la (A.13) viene detta chiusa; in particolare poi, se essa è il differenziale totale di una funzione u , cioè se vale la (A.11), essa viene detta esatta; il breve calcolo eseguito poco sopra dimostra che ogni forma esatta è chiusa.

4. L'equazione:

$$(A.14) \quad \alpha = 0$$

viene chiamata «equazione ai differenziali totali» oppure anche «equazione di Pfaff». Si dice che l'equazione (A.14) è «completamente integrabile» (oppure «illimitatamente integrabile»), secondo l'espressione impiegata da T. Levi Civita, se esistono due funzioni: $u(x)$ ed $F(x)$ tali che si abbia:

$$(A.15) \quad F \cdot \alpha = du.$$

La funzione F viene chiamata «fattore integrante della forma α », e ogni varietà rappresentata da un'equazione del tipo:

$$(A.16) \quad u(x) = c \text{ (costante)}$$

(o rappresentata in forma equivalente) viene chiamata «soluzione» oppure anche «integrale» dell'equazione (A.14).

Ovviamente se si ha $F = 1$ la forma α è esatta, secondo la terminologia introdotta nel paragrafo 3.

Si dimostra che la condizione necessaria e sufficiente perché l'equazione (A.14) sia completamente integrabile è che esista un'altra forma

$$(A.17) \quad \beta = \sum_k b_k(x) dx_k$$

tale che si abbia:

$$(A.18) \quad d\alpha = \alpha \wedge \beta.$$

Summary: Contributions to Consumer Theory. Coherence and Partial Coherence (J.E.L. D11).

The theory which aims at describing and explaining, within the limits of the possible, the behaviour of the economic agent called «consumer» is perhaps one of the most classical in origin: an example is Vilfredo Pareto's analysis of consumer choice applying the well-known procedures elaborated by Lagrange. This paper re-examines this argument utilizing the mathematical tools provided by the theory of external differential systems. To this end, classical theory is reviewed briefly, and the generalizations that are obtained by means of tools different from those commonly used in economic theory are presented. This allows us to introduce the concept of partial coherence, which enables us to generalize the concept of coherence. We want to show, in fact, that the use of mathematical tools that are more powerful than those used in Paretian theory can widen the concept of coherence and develop further the analysis of consumer behaviour.