Prof. CARLO FELICE MANARA   Prof. PIETRO CANETTA

COMPLEMENTI DI ALGEBRA

ED ELEMENTI DI TRIGONOMETRIA

AD USO DEGLI STUDENTI DEI CORSI PROPEDEUTICI DELLE FACOLTÀ UNIVERSITARIE

II EDIZIONE
RISTAMPA ANASTATICA

LA GOLIARDICA
MILANO

Nelle pagine successive si presenta il capitolo 1 del Testo, rieditato, da pag. 40 a pag. 104.

***Geometrie* rinascimentali.**

Firenze, Leon Battista Alberti.
La Cappella Rucellai e il
Sacello del Santo Sepolcro

INSIEMI DI NUMERI RAZIONALI. NUMERI REALI.

....

Le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione che abbiamo ricordate vengono anche chiamate collettivamente “operazioni razionali”; si può invero fare l'osservazione fondamentale che operando conqueste operazioni su due (e quindi anche su un numero qualunque di) numeri razionali si ottiene come risultato ancora un numero razionale. Si suole anche esprimere questo fatto dicendo che i numeri razionali formano un “corpo numerico”.

Ora è noto che si può definire un’ulteriore operazione: quella di “elevazione a potenza intera”; l’operazione inversa di questa viene abitualmente chiamata "estrazione di radice n-esima di un numero a" intendendo così indicare la ricerca di un numero che elevato a potenza n-esima, dia come risultato il numero a. Tuttavia questa ricerca non dà sempre un risultato che appartenga al corpo numerico dei numeri razionali; pertanto potremo dire che l'operazione di elevazione a potenza n-sima non ammette sempre una operazione inversa (almeno finché si rimane nel corpo dei numeri razionali) a differenza delle operazioni di somma e moltiplicazione. Invero si ha che se un numero razionale a non è la potenza n-esima di un altro numero razionale non esiste nessun numero razionale che sia la radice n-esima del numero a. Per es. poiché il numero intero 5 non è il quadrato di nessun numero razionale (si veda la dimostrazione di questo fatto nel § 1.14-Es.1) non esiste nel corpo dei numeri razionali la possibilità di dare senso all’operazione di "estrazione della radice quadrata" del numero 5.

Si suole anche dire che l’operazione di “estrazione della radice n-esima” è un’operazione "irrazionale”.

Per le ragioni esposte o per le altre (cfr. §1.24 e § 1.25) si è presentata l’opportunità di costruire degli enti del tutto nuovi, enti che vengono chiamati “numeri reali” ed il cui insieme costituisce in certo modo (cfr.§1.22) un ampliamento del corpo dei numeri razionali. Si è ottenuto così di poter dare senso in ogni caso alla operazione di “estrazione di radice n-esima” e anche ad un'altra operazione di essenziale importanza che viene abitualmente chiamata “misura delle grandezze continue” (cfr.§§ 1.24 e 1.25).

Una delle essenziali novità e delle maggiori difficoltà offerte da questi nuovi enti è il fatto che, operando con uno di essi si viene ad operare sostanzialmente su una intera classe (o insieme) di numeri razionali considerata come un tutto unico, invece che su un solo elemento come con le operazioni sui numeri razionali. Si stabiliscono tra le classi di numeri razionali delle relazioni o si definiscono delle operazioni che sono analoghe a quelle or ora ricordate valide per numeri razionali, l'analogia essendo intesa nel senso che le relazioni e le operazioni che ora definiremo hanno le stesse proprietà formali delle relazioni e delle operazioni valide per i numeri razionali.

1.10 - In questo paragrafo e nei successivi, fino ad esplicito avviso contrario, quando parleremo di “numeri” intenderemo parlare di “numeri razionali assoluti”; come è noto, per questi numeri sono valide tutte le proprietà che abbiamo richiamato nel §1.0 con la sola restrizione che l’operazione di sottrazione $a - b$ non è applicabile illimitatamente, ma soltanto se a verifica l’ipotesi $a > b$.

Consideriamo un insieme α di numeri: il vocabolo “insieme” da noi già usato, non verrà definito, né ora né in seguito; esso è preso dal linguaggio comune e si suppone che il lettore sia a conoscenza del suo significato: potremo al massimo elencare dei sinonimi del vocabolo stesso, come classe, famiglia, aggregato, raccolta ecc. e l'uso del vocabolo nei casi concreti che verrà fatto nel seguito chiarirà ulteriormente il suo significato.

Supponiamo pure che il lettore sia a conoscenza del significato di frasi come la seguente: “Il numero a appartiene all’insieme α” oppure “il numero a è un elemento dell’insieme α”. Questa relazione di un elemento a all'insieme α cui esso appartiene verrà anche espressa con simboli nel modo seguente:

(1) $a \in \alpha$,

che si legge appunto “a appartiene ad α” oppure “a è un elemento di α”.

Per estensione di linguaggio considereremo anche degli insiemi che hanno un unico elemento, ed anche un “insieme vuoto” che non possiede alcun elemento.

Indicheremo poi con l’espressione “insieme zero” e lo indicheremo con il simbolo 0 (zero) l'insieme che. contiene come unico elemento il numero zero.

Supponiamo infine che al lettore sia noto il significato della frase: “l’insieme α contiene infiniti elementi”, o di espressioni analoghe. Ogni volta che dovremo usare un insieme cosiffatto (di fondamentale importanza per tutta la teoria che segue) esso si intenderà precisato in uno dei due modi seguenti:

assegnando una legge per la costruzione di un elemento quando ne sia noto un altro, oppure ne siano noti altri;

assegnando un criterio ben determinato in base al quale si possa decidere se un qualunque numero razionale a appartiene oppure non appartiene all'insieme.

Df. 1 -·Diremo che un insieme α di numeri è "*superiormente limitato*" se esiste almeno un numero N che sia maggiore di tutti i numeri dell'insieme α.

La clausola "almeno" è giustificata dalla ovvia osservazione che se esiste un numero N che ha la proprietà di essere maggiore di tutti i numeri di α, allora (per la proprietà transitiva della relazione " $>$ ") ogni numero maggiore di N ha pure la stessa proprietà.

Es. 1 - Si consideri come insieme α l'insieme di tutti i numeri razionali che si possono rappresentare nella forma m/n , essendo m ed n due numeri interi soddisfacenti alla relazione

(2) $m < n$.

È subito visto che l'insieme α è superiormente limitato, perché ogni numero maggiore oppure uguale ad 1 (uno) è maggiore di tutti i numeri dell'insieme α.

Es. 2 - L'insieme di tutti i numeri interi (oppure di tutti i numeri razionali) non è superiormente limitato.

Lo si dimostri per esercizio.

Avvertenza: Nel seguito e salvo esplicito avviso contrario, quando parleremo semplicemente di "insieme" oppure di "insieme di numeri", intenderemo parlare di "insieme di numeri razionali superiormente limitato".

1.11 - Supponiamo che sia dato un insieme di numeri e che esso sia superiormente limitato.

Df. 1 - Diremo che un numero a dell'insieme α è il "*massimo*" di esso se a appartiene all'insieme α e se nessun numero di α è maggiore di a.

Df. 2 - Diremo che un numero a' è il "*minimo*" di un insieme α se a' appartiene ad α e se nessun numero di α è minore di a'.

Es. 1 - L'insieme α definito nell'Es. 1 del § precedente non ha massimo; supponiamo infatti che un determinato numero razionale m/n, dove m ed n soddisfano alla limitazione (§ 1.10-2) sia il massimo di α. Questa ipotesi è assurda: infatti si ha che il numero m'/n' , dove $m' = m + n$; $n' = 2n$, soddisfa alla stessa limitazione (§ 1.10-2) ed è maggiore di m/n, come si verifica facilmente.

Es. 2 – L'insieme α definito nell'Es. 1 del paragrafo precedente ammette un minimo; tale minimo è lo zero.

Oss. 1 – Se un insieme ha un numero finito di elementi (numeri) esso possiede un massimo ed un minimo.

1.12 – Df. 1 - Dato un insieme α di numeri, superiormente limitato, diremo "*insieme complementare*" di α e lo indicheremo con α' l'insieme di tutti i numeri che sono maggiori di ogni numero di α.

Es. 1 - L'insieme α trattato nell'Es. 1 del § 1.11 ammette come insieme complementare l'insieme α' di tutti i numeri razionali che si possono rappresentare nella forma m'/n', essendo m' ed n' due interi soddisfacenti alla relazione

(1) $m' > n'$.

1.13 *Insiemi speciali*

Df. 1 - Diremo che un insieme α è un "*insieme speciale*" se appartiene ad uno dei due tipi seguenti: a) l'insieme α possiede un (numero) massimo, b) l'insieme complementare α' possiede un (numero) minimo.

Oss. 1 – Appartengono al tipo a) gli insiemi aventi un numero finito di elementi ed in particolare gli insiemi aventi un unico elemento il quale, in tal caso, è ovviamente anche il massimo dell'insieme stesso (§ 1.11 - Oss.1)

Oss. 2 – Un insieme speciale non può appartenere contemporaneamente al tipo a) ed al tipo b). Lo si dimostri per esercizio (cfr. § 1.10-Es. 1 ed anche § 1.11-Es.1).

Es. 1 - L'insieme considerato in (§ 1.10-Es. 1) è speciale: esso è del tipo b).
Converremo di far corrispondere ad un insieme specialeα in modo univoco un unico e ben determinato numero razionale a: esso è il massimo dell'insieme α se questo è del tipo a), è invece il minimo dell'insieme complementare α' se l'insieme α è del tipo b).

Es. 2 - In base alle considerazioni ora stabilite all'insieme considerato in (§ 1.10-Es.1) corrisponde il numero razionale 1 (uno).

1.14 *Esistenza di insiemi generali*
Df. 1 – Se un insieme α non è dei tipi enumerati nella Df. 1 del paragrafo precedente diremo che esso è "*non speciale*" o anche "*generale*".

Oss. 1 - In base a quanto detto in (§ 1.13-Oss. 1) un insieme generale (se esiste) è sempre formato da infiniti elementi. Esistono degli insiemi generali, come prova il seguente esempio:

Es. 1 – L'insieme di tutti i numeri razionali a, tali che si abbia
(1) $a^2 < 5,$
è non speciale. Per provare questa affermazione ricordiamo anzitutto che non esiste alcun numero razionale p/q tale che si abbia
(2) $(p/q)^{\,2} = 5.$
Infatti, supponiamo, come è sempre possibile, che p e q siano primi tra loro, cioè che non abbiano fattori comuni ed osserviamo che dalla (2) si trae immediatamente
(3) $p^2 = 5\,q^2.$
Ora questa uguaglianza è assurda, perché nel primo membro il fattore 5 non entra oppure entra un numero pari di volte, mentre nel secondo membro entra un numero dispari di volte.

Dimostriamo ora che l'insieme α non possiede massimo, né l'insieme complementare α' possiede minimo.
Supponiamo anzitutto che esista un numero razionale a che sia il massimo tra quelli che soddisfano alla (1); questa ipotesi è assurda, perché esiste almeno altro numero razionale $a' > a$ che soddisfa pure alla (1). Posto
(4) $d = 5 - a^2,$
tale numero a' si può esprimere nella forma $a' = a + r$, dove r è un numero razionale, che si può sempre trovare (in infiniti modi), soddisfacente alle limitazioni:
(5) $r^2 < d/2\,;\; r < d/4a.$
Infatti, è $(a')^2 = (a+r)^2 = a^2 + 2ar + r^2$, e per le (5) si ha: $a^2 + 2ar + r^2 < a^2 + \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = 5.$
Dimostriamo ora anche che l'insieme complementare α' non ha minimo. Poniamo infatti che un numero razionale a sia il minimo dell'insieme α'complementare dell'insieme α che abbiamo definito. Non può essere $a^2 = 5$ per la dimostrazione che abbiamo già fatta, né può essere $a^2 < 5$. Invero in questo caso si potrebbe trovare un altro numero razionale (come abbiamo visto) $a + r$ tale che si abbia
(6) $(a + r)^2 < 5.$
Ma questo sarebbe assurdo, perché per ipotesi a appartiene all'insieme α' dei numeri razionali ognuno dei quali è maggiore di tutti i numeri della classe α, mentre $a + r$ appartiene alla classe α per la (6), ed è maggiore di a. Infine non può neppure essere

(7) $a^2 > 5$.
Invero se valesse la (7), posto $d = a^2 - 5$, basterebbe assumere un razionale r tale che valga $r < d/2a$, per garantire che si abbia $(a-r)^2 > 5$, contro l'ipotesi che a sia il minimo dei razionali dell'insieme α', cioè dell'insieme di numeri maggiori di tutti i numeri dell'insieme α.

Oss. 1 - L'esempio da noi sviluppato non è l'unico che si può dare: ovviamente tutte le argomentazioni svolte possono essere ripetute in relazione agli insiemi di numeri razionali a tali che si abbia $a^2 < m$, ove m è un numero razionale che non è il quadrato di un altro numero razionale.

1.15 *Insiemi completi*
Df. 1 - Diremo che un insieme α è "*completo*" quando se contiene un numero a contiene anche ogni numero minore di a.

Oss. 1 - Dato un insieme α che non sia completo è sempre possibile considerare un altro insieme completo che contiene ogni elemento di α e quindi ogni numero minore di qualcuno dei numeri di α. Diremo che questo secondo insieme è il "*completamento*" di α o anche che è stato ottenuto da α mediante l'operazione di "completamento".

Oss. 2 - Un insieme costituito da un numero finito di numeri non può essere completo; in particolare non può essere completo un insieme costituito da un solo numero, a meno che non sia l'insieme zero (cfr. § 1.10). Ovviamente un insieme costituito da un solo numero razionale m/n dà origine, per operazione di completamento, all'insieme di tutti i numeri razionali minori o uguali a m/n .

Oss. 3 - Uno stesso insieme completo può essere ottenuto con l'operazione di completamento da diversi insiemi non completi.

Es. 1 - I due insiemi seguenti:
α costituito da tutti gli infiniti numeri: 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; 0,99999; 0,99999; 0,999999……..;
β costituito da tutti gli infiniti numeri: $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \dots . \frac{n}{n+1} \dots$., sono ovviamente diversi; essi, tuttavia, danno origine allo stesso insieme completo e precisamente quello costituito da tutti i numeri minori di 1 (uno). Lo si dimostri per esercizio.

Oss. 4 - Dato un insieme non completo α, l'insieme α' complementare di α coincide con l'insieme complementare dell'insieme $\bar{\alpha}$ che si ottiene completando α. Lo si dimostri per esercizio.

Df. 2 - Anche qui, come nel § 1.13, diremo che un insieme completo è "*speciale*" se ammette un massimo oppure se il suo complementare ammette un minimo. Altrimenti l'insieme sarà chiamato "*generale*".

Oss. 5 - Con operazione di completamento un insieme speciale dà origine ad un insieme completo pure speciale. Lo si dimostri per esercizio.

1.16 *Numeri reali assoluti*
Avvertenza: D'ora innanzi e fino ad esplicito avviso contrario quando parleremo di "insieme" intenderemo parlare di "insieme completo" (e quindi anche di "insieme completo superiormente limitato di numeri razionali assoluti", in base alle avvertenze da noi date nel § 1.10).
Stabiliremo delle convenzioni che ci permetteranno di operare su un insieme completo come su un unico numero. Precisamente porremo la seguente

Df. 1 - Chiameremo ''*numeri reali*" gli insiemi completi, tra i quali conveniamo di stabilire le relazioni e di operare con le operazioni che esporremo nel paragrafo presente e nei seguenti.
Useremo una stessa lettera (di solito dell'alfabeto greco, per es. α, β, γ, δ...) per indicare un insieme

completo preso in sé e lo stesso considerato come numero reale, in base alle convenzioni che verranno esposte. Se l'insieme considerato è speciale (§ 1.13-Df. 1) diremo anche che il numero reale è speciale.

Df. 2 - Diremo che due numeri reali α e β sono "*uguali*" e scriveremo

(1) $\alpha = \beta$

nelle condizioni seguenti:

a) se i due insiemi α e β sono entrambi speciali quando il numero razionale che corrisponde al primo (Cfr. § 1.13) coincide con il numero razionale che corrisponde al secondo;

b) se i due insiemi α e β sono entrambi generali quando ogni elemento dell'uno è anche elemento dell'altro.

Non sussiste la relazione(1) tra un insieme speciale ed uno generale.

Df. 3 - Diremo che un numero reale α è *maggiore* del numero reale β e scriveremo

(2) $\alpha > \beta$

nelle condizioni seguenti:

a) se i due insiemi α e β sono entrambi speciali, quando il numero razionale che corrisponde al primo è maggiore del numero razionale che corrisponde al secondo;

b) se anche uno solo dei due insiemi è generale, quando nell'insieme α esiste almeno un numero maggiore di tutti i numeri di β e quindi maggiore di qualche numero di β'.

Df. 4 - Diremo che un numero reale α è *minore* del numero reale β e scriveremo

(2) $\alpha < \beta$

nelle condizioni seguenti:

a) se i due insiemi α e β sono entrambi speciali, quando il numero razionale che corrisponde al primo è minore del numero razionale che corrisponde al secondo;

b) se anche uno solo dei due insiemi è generale, quando esiste in β almeno un numero che è maggiore di tutti i numeri di α e quindi di qualche numero di α'.

Oss. 1 - In base alle definizioni date ed alle proprietà note delle relazioni esistenti tra numeri razionali (Cfr. §1.0) si ha

a) che la relazione (1) ha le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva;

b) che le relazioni (2) e (3) sono transitive;

c) che tra due numeri reali intercede una ed una sola delle tre relazioni ora definite. Si diano le dimostrazioni per esercizio.

Quindi le relazioni qui definite hanno le stesse proprietà formali delle relazioni che abbiamo indicate con i medesimi simboli e che hanno senso tra i numeri razionali.

1.17 *Somma di numeri reali*

Dati due numeri reali α e β si consideri l'insieme γ che si ottiene sommando ogni numero dell'insieme α con ogni numero dell'insieme β ed eventualmente completando l'insieme così costruito. Diremo che il numero reale γ è la *somma* di α e β ; scriveremo·

(1) $\gamma = \alpha + \beta$

e chiameremo "*addendi*" i numeri α e β. Diremo anche che l'operazione ora definita è una "*addizione*".

Oss. 1 - In base alla definizione data ed alle proprietà note dell'operazione di somma tra numeri razionali si ha immediatamente che l'operazione di somma ora definita tra numeri reali possiede le proprietà commutativa ed associativa (cfr. §1.0).

Oss. 2 - Se i numeri α e β sono entrambi speciali e corrispondono rispettivamente ai numeri razionali a e b anche $\alpha + \beta$ è speciale o corrisponde al numero razionale $a + b$. Lo si dimostri per esercizio.

1.18 *Differenza di numeri reali*

Dati due numeri reali α e β tali che sia (1) $\alpha > \beta$ (cfr. §1.16), si consideri l'insieme γ che si ottiene sottraendo da ogni numero a^* dell'insieme α tutti i numeri dell'insieme β' minori di a^*, ed eventualmente completando l'insieme così costruito. Diremo che il numero reale γ è la "*differenza*" di α e β, ovvero che è stato ottenuto sottraendo β da α e scriveremo:

(2) $\gamma = \alpha - \beta$;

diremo anche che α è il "*minuendo*" e β il "*sottraendo*".

Se in particolare è (3) $\alpha = \beta$ (cfr. §1.16), porremo (4) $\alpha - \beta = 0$, essendo 0 l'insieme che abbiamo definito nel § 1.10.

Oss. 1 - In base alla definizione data ed alle proprietà delle operazioni tra numeri razionali si ha immediatamente che l'operazione ora definita è l'inversa dell'operazione di addizione, ossia che si ha

(5) $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta = (\alpha + \beta) - \beta$.

Oss. 2 - Se gli insiemi α e β sono entrambi speciali anche l'insieme γ dato dalla (2) è speciale e precisamente corrisponde al numero razionale che è la differenza tra i due numeri razionali corrispondenti rispettivamente a α e β. Lo si dimostri per esercizio.

1.19 *Prodotto di numeri reali*

Dati due numeri reali α e β si consideri l'insieme γ di numeri razionali che si ottiene moltiplicando ogni numero dell'insieme α con ogni numero dell'insieme β ed eventualmente completando l'insieme così costruito. Diremo che il numero reale γ è *prodotto* di α per β e scriveremo

(1) $\gamma = \alpha \cdot \beta$,

oppure anche

(2) $\gamma = \alpha \times \beta$,

e chiameremo anche "*moltiplicazione*" l'operazione che è stata ora definita e che conduce al numero γ a partire dai numeri α e β; questi verranno anche chiamati "*fattori*".

Porremo in particolare

(3) $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$, e anche

(4)($\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$) n volte $= \alpha^n$.

Oss. 1 - In base alla definizione data ed alle proprietà note dell'operazione di moltiplicazione tra numeri razionali si ha immediatamente che l'operazione di prodotto ora definita ha le proprietà commutativa ed associativa; inoltre, essa gode della proprietà distributiva rispetto alla somma. Si possono quindi applicare anche ai numeri reali le operazioni note dell'Algebra elementare che consistono nelle cosiddette "regole per togliere le parentesi" e per "raccogliere a fattor comune" e che sono fondate sulla proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma.

Oss. 2 - Se i due insiemi α e β sono entrambi speciali, l'insieme γ è pure speciale e corrisponde al prodotto dei numeri razionali ognuno dei quali corrisponde rispettivamente ad α e a β. Lo si dimostri per esercizio.

Oss. 3 - Se uno dei due fattori α oppure β è l'insieme zero (§ 1.10), il prodotto è l'insieme zero, e viceversa se nessuno dei due fattori è zero il prodotto non può essere l'insieme zero. Quindi si ha anche per il prodotto ora definito tra numeri reali la nota proprietà di annullamento del prodotto: "Il prodotto di due (o più) fattori è zero allora ed allora soltanto che almeno uno dei fattori è zero".

1.20 *Quoziente di numeri reali*

Dati due numeri reali α e β il secondo dei quali diverso da zero, si consideri l'insieme γ che si ottiene dividendo ogni numero dell'insieme α per ogni numero dell'insieme β ed eventualmente completando l'insieme ottenuto. Chiameremo il numero reale così ottenuto il "*quoziente*" di α per β e scriveremo

(1) $\gamma = \alpha/\beta$,

e chiameremo "*divisione*" l'operazione che conduce a costruire l'insieme γ (a partire dagli insiemi α e β). Inoltre il numero reale α sarà chiamato anche "*dividendo*" ed il numero· reale β "*divisore*".·

Oss. 1 - In base alla definizione data e alle proprietà delle operazioni sui numeri razionali (supposte note) si ha che l'operazione ora definita risulta inversa dell'operazione di moltiplicazione; si ha quindi

(2) $\alpha = (\alpha/\beta)\beta = (\alpha \cdot \beta)/\beta$

Oss. 2 - Se i due insiemi α e β sono entrambi speciali si ha che anche l'insieme γ è speciale e precisamente corrisponde al numero razionale quoziente dei due numeri razionali corrispondenti rispettivamente agli insiemi α e β.

Es. 1 – Si dimostri che se è $\beta > \beta' > 0$, si ha: $\alpha/\beta < \alpha/\beta'$.

1.21 - Abbiamo visto (§1.15 - 0ss.3) che uno stesso insieme completo può essere ottenuto mediante operazione di completamento da diversi insiemi.

Df. 1 - Converremo di dire che un insieme non completo il quale mediante operazione di completamento dà origine ad un insieme completo σ è una "*rappresentazione*" del numero reale σ.

Df. 2 - Due diverse rappresentazioni che, mediante operazione di completamento, dànno lo stesso numero reale verranno chiamate *equivalenti*. Così i due insiemi α e β introdotti in § 1.15-Es. 1 costituiscono due rappresentazioni equivalenti di uno stesso insieme speciale: quello di tutti i numeri razionali minori di 1.

Assumeremo il numero razionale m/n come una rappresentazione dell'insieme speciale formato da tutti i numeri razionali non maggiori di m/n (§ 1. 13-tipo a) oppure formato da tutti i numeri razionali minori di m/n (§1 .13-tipo b). Questa, tuttavia, non è l'unica rappresentazione del numero reale speciale, come dimostrato dai due esempi citati or ora.

1.22 - Abbiamo visto che un numero reale speciale può essere rappresentato da un unico numero razionale m/n che è massimo dell'insieme completo speciale e minimo dell'insieme complementare; abbiamo pure osservato che le operazioni definite nei precedenti paragrafi se eseguite su numeri speciali dànno ancora come risultati dei numeri speciali e precisamente quelli che sono rappresentati dai numeri razionali che si ottengono eseguendo le operazioni corrispondenti sui razionali corrispondenti: per es. se si sommano due numeri reali speciali, l'uno rappresentato dal numero razionale m/n e l'altro rappresentato dal numero razionale p/q si ottiene il numero reale speciale rappresentato dal numero razionale $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$.
Si suole esprimere questo fatto dicendo brevemente che "tra i numeri reali vi sono in particolare i numeri razionali" oppure anche dicendo che "i numeri razionali sono dei particolari numeri reali" o anche infine che "la classe dei numeri reali costituisce un ampliamento della classe dei numeri razionali". Si suole anche dire che un numero razionale m/n viene confrontato con un numero reale α; questo modo di esprimersi (inesatto se preso a rigore di termini, perché un numero razionale ed un numero reale non sono enti appartenenti alla stessa classe e pertanto non sono confrontabili tra loro) è da intendersi come abbreviazione convenzionale dell'espressione esatta, ma più lunga: "si confronta il numero reale speciale rappresentato dal razionale m/n con il numero reale α".

Analogamente si parla per es. del "prodotto di un numero razionale m/n per un numero reale α"; un modo di esprimersi cosiffatto è accettabile soltanto se si conviene di considerarlo come una abbreviazione della espressione esatta ma più lunga: "prodotto del numero reale speciale rappresentato dal razionale m/n con il numero reale α".

Queste convenzioni vengono abitualmente adottate nelle formule: per es. l'espressione 2α va intesa come esprimente il prodotto del numero reale speciale rappresentato dal numero razionale (anzi addirittura intero) 2 e del numero reale α.

Si dimostra facilmente che è anche $\alpha + \alpha = 2\alpha$, e in generale $\alpha + \alpha + \cdots + \alpha$ (n volte) $= n\alpha$.

Analoghe interpretazioni valgono per l'espressione del tipo ($m/n)\alpha$.

Analogamente, supposto che si abbia $\alpha \neq 0$, si suole indicare con l'espressione $1/\alpha$ il numero reale γ

(che viene anche chiamato il "*reciproco*" o anche l' "*inverso*" di α) che si ottiene come quoziente del numero reale speciale rappresentato dal numero razionale (anzi addirittura intero) 1 (uno) per il numero α. Si dimostra facilmente che si ha anche $\alpha\,\gamma = 1$.

Insomma, si potrebbe dire che è possibile operare sui numeri razionali come se fossero dei particolari numeri reali, purché ogni volta che si parla di ''un razionale m/n" si intenda questa espressione come una abbreviazione convenzionale dell'espressione esatta "numero reale speciale rappresentato dal razionale m/n ".

Df. 1 - I numeri reali che non sono speciali (ai termini della Df. data nel § 1.16) e che abbiamo fin qui chiamati "numeri generali" vengono abitualmente chiamati "*numeri irrazionali*"; noi adotteremo d'ora innanzi questa nomenclatura.

Es. 1 - È irrazionale il numero definito in (§ 1.14 -Es. 1).

1.23 *Estrazione di radice di un razionale*

Una delle più importanti applicazioni della teoria dei numeri reali svolta nei precedenti paragrafi è quella di poter sempre considerare un numero x che soddisfi alla condizione

(1) $x^n = a$,

essendo n un intero positivo ed a un numero razionale pure positivo. Abbiamo visto che se a non è la potenza n-esima di un altro razionale non esiste un numero razionale che soddisfi alla (1) (cfr.§1.14-Es.1, dove $n = 2, a = 5$).

Osserviamo tuttavia che è possibile sempre trovare dei numeri razionali r soddisfacenti alla condizione

(2) $r^n < a$.

Come è chiaro, l'insieme dei numeri razionali che soddisfano alla (2) è superiormente limitato e quindi dà origine ad un ben determinato numero reale x che è soluzione della (1). Si suole indicare tale numero reale con la notazione

(3) $x = \sqrt[n]{a}$,

e l'operazione che conduce alla determinazione del numero x soddisfacente la (1) viene anche abitualmente chiamata "*operazione di estrazione di radice* n-esima" del numero a, e considerata come "*operazione inversa*" di quella di "*elevazione a potenza* n-esima" (cfr.§ 1.0).

Potremo pertanto dire che il ricorso ai numeri reali permette di dare senso in ogni caso all'operazione di "estrazione di radice n-esima" di un numero razionale positivo.

Oss. 1 - Si verifica che se $a > 1$ ogni numero r che soddisfa alla (2) è minore di a , e che se $a < 1$ ogni numero r che soddisfa alla (2) è maggiore di a. Lo si di mostri per esercizio.

1.24 *Estrazione di radice di un reale qualunque*

Una immediata estensione degli sviluppi del paragrafo precedente si ha nella risoluzione del problema di determinare il numero reale x che soddisfi alla relazione

(1) $x^n = \alpha$,

dove il numero α è un numero reale qualunque. (Si noti la differenza col problema risolto nel precedente paragrafo; invero nella (1.23 -1) il numero a è un numero razionale).

Anche in questo caso è possibile considerare l'insieme dei numeri razionali r tali che si abbia

(2) $r^n < \alpha$ (Per il senso di questa relazione tra un numero razionale ed un numero reale qualunque valgono le avvertenze del § 1.22).

Anche in questo caso, come in quello del paragrafo precedente, si ha che l'insieme dei numeri r è superiormete limitato e quindi esso, eventualmente reso completo, dà un numero reale x, che è soluzione della (1) e che si conviene anche di indicare con il simbolo

(3) $x = \sqrt[n]{\alpha}$.

Potremo pertanto concludere che nel campo dei numeri reali l'operazione di elevazione a potenza intera è sempre invertibile o in altre parole è sempre possibile l'operazione di estrazione della radice n-esima di un numero reale qualunque.

1.25 *Rapporto di due grandezze omogenee – Postulato di continuità delle grandezze*

Un secondo problema di importanza fondamentale la cui soluzione viene resa possibile dalla teoria dei numeri reali è quello della determinazione del rapporto di due grandezze omogenee nelle ipotesi più generali. Per fissare le idee ci limiteremo in questo paragrafo a trattare il caso particolare in cui le due grandezze considerate siano due segmenti di retta.

Come è noto, dati due segmenti **a** e **b**, se essi hanno (almeno) un multiplo comune, cioè se esistono almeno due interi m ed n tali che si abbia

(1) $m\mathbf{b} = n\,\mathbf{a}$ (Supponiamo che sia noto al Lettore il significato della frase "multiplo di un segmento **a** secondo un intero n", ed il significato dell'espressione n **a,** dove n è un intero ed **a** un segmento).

Si conviene di scrivere

(2) $\mathbf{a}/\mathbf{b} = m/n$, e anche

(2') $\mathbf{a} = m/n\ \mathbf{b}$, oppure

(2'') $\mathbf{b} = n/m\ \mathbf{a}$,

e di dire che il numero razionale m/n è il "*rapporto dei due segmenti* **a** e **b**" (nell'ordine enunciato).

Ora è noto che due segmenti non sempre soddisfano alla condizione di possedere (almeno) un multiplo comune; ciò non avviene per es. quando **a** sia la diagonale di un quadrato di cui **b** sia il lato. Tuttavia è sempre possibile trovare l'insieme di tutti i numeri razionali rappresentabili nella forma m/n , tali che si abbia

3) $m\mathbf{b} < n\mathbf{a}$ (Supponiamo che sia noto al lettore il significato della relazione tra segmenti espressa dal segno "$<$ " e le sue proprietà).

Tale insieme di numeri razionali, come si vede subito, è superiormente limitato e quindi costituisce un numero reale ρ che assumeremo· come "*rapporto tra i due segmenti*", convenendo inoltre di scrivere

(4) $\mathbf{a}/\mathbf{b} = \rho$.

Le precedenti considerazioni si possono presentare in forma lievemente diversa, ma notevolmente utile, come segue: possiamo sempre supporre che il segmento **b** sia un segmento fissato, che si suole chiamare "*unità di misura*" dei segmenti; indichiamolo con **u**. Allora il numero reale α che dà il rapporto

(5) $\mathbf{a}/\mathbf{u} = \alpha$

viene chiamato anche "*misura del segmento* **a** nell'unità **u**" e si scrive anche·

(5)' $\mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{u}$.

Fissato che sia **u**, ad ogni segmento **a** corrisponde univocamente un numero reale α. Viceversa, fissato che sia **u,** ad ogni numero reale α corrisponde un unico e ben determinato segmento **a** tale che sia soddisfatta la (5), in forza del ben noto POSTULATO DELLA CONTINUITÀ DELLA RETTA:

"Dato un insieme di segmenti superiormente limitato (cioè tale che esista almeno un segmento **N** maggiore di tutti i segmenti nell'insieme) esiste un unico e ben determinato segmento **M** che è il più piccolo tra i segmenti maggiori o uguali di tutti i segmenti dell'insieme".

Nota: L'enunciato da noi qui esposto del noto Postulato della continuità della retta è uno dei tanti che possono essere dati ed è particolarmente adatto alla definizione di numero reale da noi introdotta nel § 1.16

Si consideri ora un numero reale α e l'insieme completo α, o anche uno qualunque tra gli insiemi atti a dare una rappresentazione di α. Ovviamente ad ogni numero m/n dell'insieme corrisponde il segmento $(m/n)\,\mathbf{u}$; la classe di tutti i segmenti cosiffatti è superiormente limitata e quindi in base al Postulato ora enunciato esiste un unico e ben determinato segmento **M** che ammette come misura il numero reale α.

Es. 1 - Un esempio classico di applicazione del Postulato ora enunciato si ha nella risoluzione del noto Problema di *rettificazione della circonferenza*.

Si tratta come è noto di attribuire un senso alla frase "misura della (lunghezza della) circonferenza" tenendo conto del fatto che è noto finora soltanto il senso della frase "misura di un segmento".

Notiamo che "a priori" tale lunghezza può essere un numero in relazione qualsiasi con la misura del raggio, dato che la frase suddetta è finora priva di senso. Tuttavia, si osserva che esistono delle esperienze concrete sui corpi rotondi che limitano di molto l'arbitrarietà della scelta, anzi giungono a determinare tale scelta: invero è esperienza comune quella di adagiare un filo inestendibile sulla circonferenza e poi stirarlo sino a fargli assumere la forma che può essere resa con il concetto geometrico di "segmento di retta". Pertanto, da un'esperienza cosiffatta e da altre analoghe, noi riteniamo di avere abbastanza chiaro il senso dell'espressione "circonferenza rettificata". Per porre questi discorsi in forma geometrica rigorosa, ci riferiremo per semplicità ad un arco che supporremo minore di una semicirconferenza ed avente per estremi i punti **A** e **B**; arco che converremo di indicare con il simbolo **AB**. Penseremo tale arco descritto da **A** verso **B** nel senso contrario a quello delle lancette dell'orologio (senso indicato in figura da una freccia, vedi fig. 1.1).

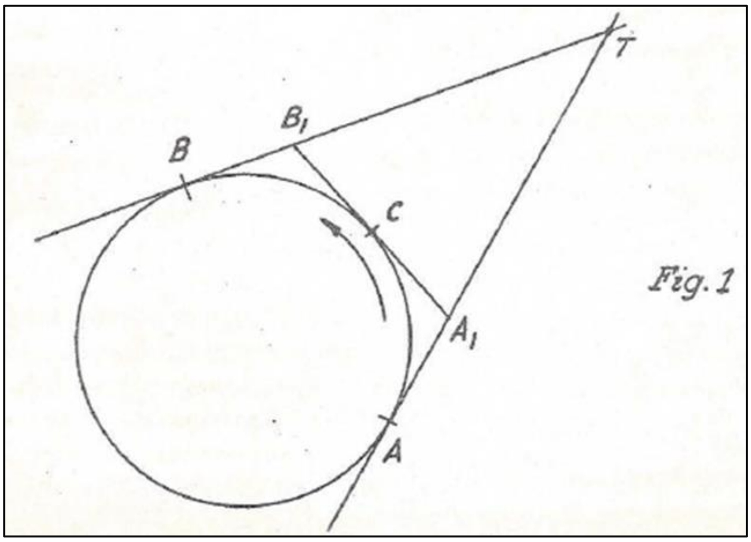


Figura 1.1

Indichiamo con **T** il punto comune alle tangenti in **A** e **B**, con **C** un punto dell'arco compreso tra **A** e **B**, con $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{B_1}$ rispettivamente i punti in cui la tangente in **C** incontra le tangenti **AT** e **BT**. Supponiamo di avere fissato un segmento **u** che assumiamo come unità di misura dei segmenti e conveniamo di indicare semplicemente con AB la misura del segmento avente come estremi **A** e **B** nell'unità prefissata e di usare una notazione analoga per tutti gli altri segmenti. Si hanno allora dalla Geometria Elementare le relazioni

$AC < A\,A_1 + A_1C$, e

$C\,B < C\,B_1 + B_1B$;

quindi sommando membro a membro si ottiene: (Nota: Si dimostra immediatamente che sommando membro a membro due diseguaglianze aventi lo stesso senso si ottiene ancora una diseguaglianza avente lo stesso senso delle prime):

$AC + CB < AA_1 + B_1B + (A_1C + C\,B_1) = AA_1 + B_1B + A_1B_1$.

Ma d'altra parte è (ancora per le stesse proprietà di Geometria Elementare):

$A_1\,B_1 < A_1\,T + T\,B_1$, e quindi:

$AC + CB < A\,A_1 + B_1B + A_1\,T + T\,B_1 = A\,A_1 + B\,B_1 + A_1\,T + B_1T$.

Nel secondo membro di questa diseguaglianza il primo e terzo addendo danno AT ed analogamente il secondo e il quarto danno BT. Pertanto, si ha in definitiva

$AC + CB < AT + TB$.

In modo perfettamente analogo ai dimostra che quando si fissa un punto **D** nell'arco **CB** (cfr. Fig.1.2) si ottiene $AC+CD+DB < AT+TB$.

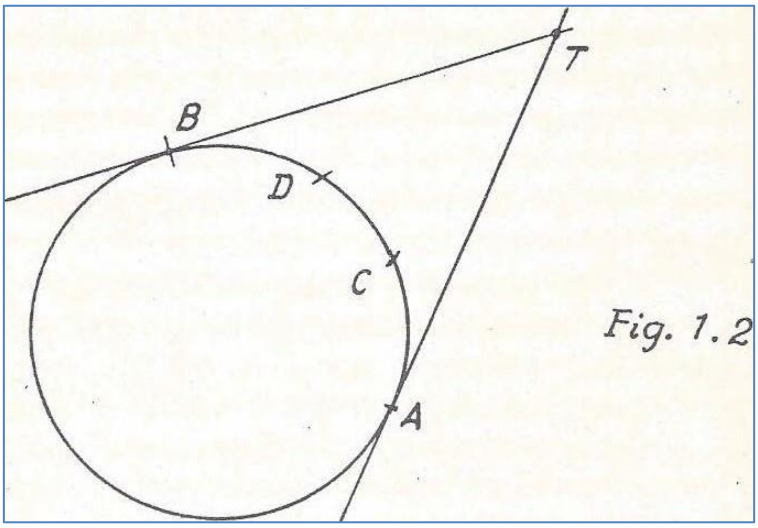


Figura 1.2

Si considerino ora n punti $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ (in numero finito) appartenenti all'arco **AB** nell'ordine scritto secondo il verso che abbiamo fissato sull'arco stesso.

Come è noto si chiama "*spezzata poligonale inscritta nell'arco* **AB**" o anche semplicemente "*poligonale inscritta*" la linea formata dai segmenti $\mathbf{AP_1}, \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_2\mathbf{P}_3, \ldots, \mathbf{P}_{n-1}\mathbf{P}_n, \mathbf{P}_n\mathbf{B}$ **.**

Questi segmenti vengono abitualmente chiamati "*lati*" della poligonale, mentre i punti **A**, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$**,...** vengono chiamati "*vertici*" della stessa. Inoltre, diciamo "*lunghezza*" della spezzata la somma delle lunghezze dei lati, cioè la somma: $\mathrm{AP}_1 + \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 + \cdots. + \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n + \mathrm{P}_n\mathrm{B}$.

Da quanto precede si ha immediatamente che comunque si fissi il numero dei punti **P** e comunque si vari la loro posizione, purché siano rispettate le relazioni di ordinamento di cui abbiamo detto, la lunghezza della spezzata risulta minore della somma AT + BT.

Quindi se si considera l'insieme di tutti i segmenti ognuno dei quali ha lunghezza uguale a quella di una tra le infinite possibili poligonali inscritte nell'arco, si ha che tale insieme è superiormente limitato. Quindi in forza del postulato della continuità della retta si avrà che esiste un unico segmento che è il più piccolo tra tutti i segmenti maggiori o uguali a tutti i segmenti dell'insieme. La lunghezza di tale segmento viene definita come "*lunghezza dell'arco* **AB**" di circonferenza.

Si ha poi immediatamente che gli archi formano una classe di grandezze e quindi si può parlare di somma e differenza di due archi; si giunge così a definire la lunghezza dell'intera circonferenza con un ragionamento analogo a quello qui svolto oppure come somma di parti.

1.26 *Misura di grandezze continue*

Le considerazioni che abbiamo svolte nel paragrafo precedente a proposito del problema della misura dei segmenti possono essere ripetute quasi integralmente (salvo degli ovvi aggiustamenti di linguaggio) per il problema della misura delle grandezze continue.

Non stiamo qui a ripetere la definizione rigorosa della teoria delle grandezze continue, di cui la Geometria Elementare offre numerosi e notevoli esempi: angoli, settori di uno stesso cerchio, archi di una stessa circonferenza, aree di poligoni, volumi di poliedri ecc.

In tutti questi casi si parla di "*classi di grandezze omogenee*" e si enuncia un POSTULATO DI CONTINUITÀ per esempio nella forma seguente:

"Ogni classe superiormente limitata di grandezze omogenee determina univocamente una unica grandezza **M** che è la minima tra le grandezze maggiori o uguali di tutte le grandezze della classe".

(*Nota*: Anche questo enunciato è uno tra i tanti che si possono dare, scelto per la particolare opportunità di applicazione della teoria dei numeri reali svolta precedentemente).

Invero, date due grandezze omogenee **a** e **b** è sempre possibile definire un numero reale α determinato come nel paragrafo precedente dall'insieme superiormente limitato dei numeri razionali m/n tali che si abbia (1) $m\mathbf{b} \leq n\,\mathbf{a}$.

Viceversa, dato il numero reale α e la grandezza **b**, in base al Postulato or ora enunciato si dimostra immediatamente l'esistenza di una unica grandezza **a** tale che si abbia

(2) $\mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{b}$.

Anche in questo caso, data una classe di grandezze omogenee, si può fissare una grandezza **u**, omogenea con esse, che verrà chiamata ''unità di misura''. Allora, data una qualunque grandezza **a** della classe, è univocamente determinato un numero reale α tale che si abbia

(3) $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u}$

e viceversa; tale numero viene chiamato "*misura della grandezza* **a** *nell'unità* **u**".
Se si cambia unità di misura, ossia se si assume una nuova grandezza **u'** tale che si abbia $\mathbf{u}' = \rho\,\mathbf{u}$, essendo ρ un numero reale, cambieranno ovviamente tutte le misure delle grandezze. Si ha facilmente che se è $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u}$ e anche $\mathbf{a} = \alpha'\mathbf{u}'$, si può dedurre $\alpha'\rho = \alpha$.

1.27 - In stretto collegamento con ciò che precede sta il noto CRITERIO DI PROPORZIONALITÀ TRA CLASSI DI GRANDEZZE:

Date due classi di grandezze: G e G', se esiste tra le grandezze della classe G e quelle della classe G' una corrispondenza biunivoca tale che indicate con **a**, **b**, **c**,... le grandezze della classe G e con **a'**, **b'**, **c'**,...le·grandezze corrispondenti della classe G', se valgono le condizioni

1) a due grandezze uguali tra loro **a** e **b** appartenenti a G corrispondano due grandezze uguali tra loro **a'** e **b'** appartenenti a G';

2) ad una grandezza **c** somma di due altre **a** e **b** appartenenti a G corrisponda una grandezza **c'** somma delle due corrispondenti **a'** e **b'** della classe G';

allora dette **a** e **b** due grandezze qualunque della classe G e dette **a'** e **b'** le corrispondenti della classe G' si ha in ogni caso

(1) $\mathbf{a}/\mathbf{b} = \mathbf{a}' / \mathbf{b}'$.

Per la dimostrazione si noti che in base alle ipotesi 1) e 2) per ogni coppia di numeri interi m ed n tali che si abbia

(2) $m\,\mathbf{a} < n\,\mathbf{b}$

è anche

(3) $m\,\mathbf{a}' < n\,\mathbf{b}'$

e pertanto (cfr. paragrafo precedente) risultano uguali i due numeri reali α ed α' che danno rispettivamente i rapporti $\mathbf{a}/\mathbf{b}$ e $\mathbf{a}'/\mathbf{b}'$.

Il noto teorema di Talete è conseguenza immediata del Criterio ora dimostrato; precisamente quando si consideri la corrispondenza che sorge tra i punti di due trasversali r ed r' ritenendo corrispondenti i punti secati da una stessa retta appartenente ad un dato fascio di rette parallele, i segmenti corrispondenti sono tali da verificare le ipotesi 1) e 2).

1.28 *Ogni insieme superiormente limitato di numeri reali ammette uno e un solo estremo superiore*

Abbiamo imparato ad operare sui singoli numeri reali, cioè sugli insiemi completi superiormente limitati di numeri razionali. Nulla vieta che si pensi anche ad insiemi i cui elementi sono numeri reali. Anche in questo caso diremo che un insieme di numeri reali è "*superiormente limitato*" se esiste almeno un numero reale N che è maggiore di tutti i numeri dell'insieme; la ragione della clausola "almeno" che entra nell'enunciato precedente è analoga a quella esposta nel § 1.10.

Può sorgere ora una questione originata dall'osservazione che gli insiemi superiormente limitati di numeri razionali sono stati gli strumenti fondamentali per costruire la teoria dei numeri reali, cioè per costruire un insieme di enti più ampio, che contiene i numeri razionali dentro di sé come casi particolari (nel senso precisato nel § 1.22). Ci si può ora domandare se la considerazione degli insiemi superiormente limitati di numeri reali può di nuovo portare ad un ampliamento ulteriore della classe dei numeri reali stessi. La risposta a questa domanda è negativa ed è sostanzialmente il contenuto del seguente Teorema:

Teorema - Dato un insieme A superiormente limitato di numeri reali, esiste un unico numero reale α che è il minimo tra tutti i numeri reali che non sono inferiori a nessun numero dell'insieme A. Tale numero α viene chiamato "*estremo superiore*" dell'insieme A; se inoltre il numero α appartiene ad A (cioè è un elemento dell'insieme A) esso viene anche detto "*massimo*" di A.

Per la dimostrazione consideriamo tutti i numeri razionali che appartengono agli insiemi completi costituenti i numeri reali dell'insieme A; questi formano ancora un insieme il quale è superiormente limitato perché tale è per ipotesi A. Quindi questo insieme - eventualmente reso completo - costituisce un unico ben determinato numero reale α.

Dimostriamo inoltre che α possiede le proprietà enumerate nell'enunciato del Teorema; a tal fine supponiamo anzitutto per un momento che esista un numero reale β appartenente all'insieme A e tale che si abbia

(1) $\beta > \alpha$

e dimostriamo che la relazione (1) è assurda. Infatti il numero reale α è determinato dall'insieme di tutti i numeri razionali che costituiscono i numeri reali dell'insieme A; invece se valesse la (1) vi sarebbe almeno un razionale costituente l'insieme completo β che supera tutti i razionali che costituiscono α (cfr. § 1.10).
Supponiamo ora che esista un altro numero reale α' che abbia tutte le proprietà di α e tale che sia

(2) $\alpha' < \alpha$.

Se fosse vera la (2) esisterebbe (sempre per quanto è stato detto nel § 1.10) nell'insieme completo α almeno un numero razionale che supera tutti i numeri razionali costituenti il numero reale α'. Ma per il modo in cui è stato costruito il numero reale α un numero razionale dell'insieme completo α appartiene a qualche insieme completo che costituisce un numero reale dell'insieme A. Quindi se α' soddisfa alla (2) non può essere stato costruito con tutti i numeri razionali che costituiscono gli insiemi completi dei numeri reali dell'insieme A; quindi vi sono razionali in A maggiori di α', contro l'ipotesi che α' sia estremo superiore.

Es. 1 - L'insieme di tutti i numeri reali minori di 1 (uno) ammette come estremo superiore 1. Nel seguito indicheremo tale insieme con il simbolo ϑ.

Df. 1 - Dato un insieme A superiormente limitato di numeri reali chiameremo "*insieme complementare*" di esso l'insieme A' di tutti i numeri reali, ognuno dei quali è maggiore di tutti i numeri di A.

Oss. 1 - Il numero reale α la cui esistenza è garantita dal Teorema è anche l' "*estremo inferiore*" dell'insieme A', cioè il massimo tra i numeri reali che hanno la proprietà di non essere maggiori di nessun numero di A'.

Oss. 2 - Se il numero reale α di cui sopra è solo l'estremo superiore (e non il massimo) dei numeri di A, esso appartiene ad A' e quindi è il minimo tra i numeri di A'; viceversa se il numero α è il massimo dei numeri di A esso è solo l'estremo inferiore, (non il minimo), dei numeri di A'.

Es. 2 - L'insieme ϑ' complementare dell'insieme ϑ definito nell'Es. 1 ammette il numero 1 (uno) come minimo.

1.29 *Approssimazioni*

Si consideri un numero reale α; sia a un numero razionale appartenente all'insieme completo α e sia a' un numero dell'insieme complementare α'. In base alla convenzione di linguaggio introdotta nel §1.22 potremo dire che a è minore di α e che a' è maggiore di α', scrivendo

(1) $a < \alpha < a'$.

Inoltre indicata con d la differenza tra a' e a, cioè posto

(2) $a' - a = d$, converremo di dire che

"a dà una *approssimazione per difetto* di α *con errore minore di* d" ed anche di dire che "a' dà una *approssimazione per eccesso di* α *con errore minore di* d".

Consideriamo ora un secondo numero reale·β e siano b e b' rispettivamente due approssimazioni per difetto o per eccesso di β. Da quanto precede e soprattutto dagli sviluppi dei §§1.16, 1.18, 1.19; 1.20, 1.21 si ha che la somma $a + b$ fornisce una approssimazione per difetto e $a' + b'$ una approssimazione per eccesso della somma $a + \beta$; analogamente il prodotto ab fornisce una approssimazione per difetto ed il prodotto

$a'b'$ una approssimazione per eccesso del prodotto $\alpha\beta$.

Inoltre se è $\alpha > \beta$ ed è anche $a > b'$, la differenza $a - b'$ fornisce una approssimazione per difetto ed $a' - b$ una approssimazione per eccesso della differenza $\alpha - \beta$.

Infine, supposto $\beta \neq 0$ ed anche $b \neq 0$, a/b' fornisce una approssimazione per difetto ed a'/b una approssimazione per eccesso del rapporto α/β .

1.30 *Rappresentazioni decimali*

Abbiamo visto nel § 1.21 che cosa si intenda per una" *rappresentazione* "di un numero reale α: si tratta di un insieme non completo di numeri razionali il quale con operazione di completamento dà l'insieme completo che costituisce il numero reale α. Abbiamo anche visto che uno stesso numero reale può avere diverse rappresentazioni che abbiamo chiamate "equivalenti". Tra le rappresentazioni di un numero reale hanno particolarmente importanza quelle che vengono chiamate "*rappresentazioni decimali*" del numero.

Df. 1 - Si dice che un insieme di numeri razionali costituisce una *rappresentazione decimale* di un numero reale α se sono soddisfatte le due seguenti condizioni:

1) ogni numero dell'insieme è una frazione del tipo $m/10^r$, dove m è un intero ed r un intero positivo, cioè tale che sia $r \geq 0$;

2) ogni numero del tipo (1) appartenente all'insieme costituisce una approssimazione di α con errore minore di 10^{-r}. In altre parole, si ha

(3) $m/10^r \leq \alpha < m/10^r + 1/10^r$.

Es. 1 - Il numero reale $1/3$ (cioè l'insieme completo di tutti i razionali che non sono maggiori di $1/3$) ammette come rappresentazione decimale l'insieme

(4) 0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; 0,33333; 0,331333; … … … ..

Infatti si ha (5):

$$0{,}3 = \frac{3}{10} < \frac{1}{3} < \frac{4}{10} = 0{,}4$$
$$0{,}33 = \frac{33}{100} < \frac{1}{3} < \frac{34}{100} = 0{,}34$$
$$0{,}333 = \frac{333}{1000} < \frac{1}{3} < \frac{334}{1000} = 0{,}334$$
....

Df. 2 - Ogni numero razionale del tipo (1) che soddisfi alla (3) si dice costituire una "*approssimazione decimale*" del numero reale α a meno di 10^{-r} *per difetto*; analogamente il numero $(m+1)/10$ che soddisfi alla (3) si dice costituire una *approssimazione decimale per eccesso* di α a meno di 10^{-r}.

Ovviamente i numeri che costituiscono la rappresentazione decimale di un numero reale α con errore minore di 10^{-r}possono essere disposti in una successione, la quale è ordinata secondo valori crescenti di r. Nella pratica si suole scrivere per esempio:

(6) $\sqrt{3} = \ 1{,}732 \ldots \ldots$,

invece di scrivere

(7) $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$,

ovvero per indicare che i primi numeri della rappresentazione decimale del numero reale (irrazionale) $\sqrt{3}$ sono

(8) 1 ; 1,7; 1,73; 1,732 … … ..

e che non ci interessa determinare gli altri o non siamo per il momento in grado di farlo; si suol dire anche che $1, 7, 3, 2$ nell'ordine sono "*cifre esatte*" della rappresentazione decimale del numero reale $\sqrt{3}$.

Inoltre quando sia dato un numero reale α rappresentato in forma decimale, si suol chiamare "*caratteristica*" di α il massimo numero intero minore di α e si suol chiamare "*mantissa*" di α il numero reale·(minore di 1) che è la differenza tra α e la sua caratteristica. Così per es. riferendoci alla (6) potremo dire che la caratteristica di $\sqrt{3}$ è 1 e che la mantissa di $\sqrt{3}$ è $0{,}732 \ldots \ldots$.

Come è noto un numero razionale, che sia rappresentabile nella forma m/n (con m e n interi primi tra loro), è rappresentabile anche da un unico numero del tipo (1) se il denominatore n è decomponibile nel prodotto di fattori primi 2 e 5 soltanto, mentre è rappresentabile con una rappresentazione decimale costituita da infiniti numeri in ogni altro caso. Tali infiniti numeri si costruiscono con una legge molto semplice: considerata la successione di numeri decimali del tipo (1) che danno la rappresentazione di un numero razionale cosiffatto, si ha che nei numeri m le cifre a destra (da un certo punto in poi) si riproducono periodicamente. Si suole dire che "un numero razionale è rappresentato da un allineamento decimale *finito* oppure *periodico*".

1.31 - Poiché nella pratica si usano quasi sempre delle approssimazioni decimali dei numeri reali, conviene saper valutare gli errori che si hanno operando con le operazioni razionali sulle approssimazioni decimali dei numeri reali. Si possono perciò tener presenti le osservazioni del § 1.28 oppure conviene anche introdurre delle notazioni che si rivelano spesso molto comode. A tal fine invece di scrivere per es. la (§ 1.30-6) si suole scrivere

(1) $\sqrt{3} = 1{,}732 + \vartheta 10^{-3}$,

essendo ϑ un opportuno numero dell'insieme definito nel §1.28-Es. 1, formato da tutti i numeri reali minori di 1 (uno). In altre parole, scrivere la (1) equivale ad affermare l'esistenza di un opportuno numero dell'insieme tale che valga la (1) stessa, o anche a dire che $\sqrt{3}$ vale la somma del numero decimale 1,732 e di una frazione (che non possiamo determinare per ora o che non ci interessa determinare) di 10^{-3}.

Analogamente in base ai numeri dell'insieme (§1.30-8) scriveremo le uguaglianze

(2) $\sqrt{3} = 1 + \vartheta$; $\sqrt{3} = 1{,}7 + \vartheta\, 10^{-1}$; $\sqrt{3} = 1{,}73 + \vartheta\, 10^{-2}$.

In ognuna di queste uguaglianze ovviamente il numero simbolizzato con ϑ ha un valore diverso (ma sempre minore di 1); non ci interessa precisare ulteriormente il suo valore.

1.32 *Somma con valori approssimati*

Diamo ora qualche breve cenno a proposito delle operazioni razionali (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione) eseguite su valori approssimati dei numeri reali, tenendo conto di quanto è stato detto nel §1.40 e delle notazioni introdotte nel prece dente paragrafo. Siano α e β due numeri reali e siano a e b due numeri decimali che dànno le approssimazioni di α e β con errori minori di 10^{-r}; valgono cioè le

(1) $\alpha = a + \vartheta\, 10^{-r}$

(2) $\beta = b + \vartheta\, 10^{-r}$,

essendo soddisfatta la condizione (§ 1.30-1): (3) $r \geq 0$.

Naturalmente non si esclude il caso in cui uno (o più) dei numeri ϑ abbiano valore zero: ciò significa semplicemente che il numero reale corrispondente coincide (nel senso precisato nel § 1.22) con un numero razionale decimale, o meglio che questo ne dà una rappresentazione nel senso precisato in § 1.22.

Tenendo conto di quanto è detto in§ 1.40 si avrà

(4) $a + b < \alpha + \beta < (a + b) + 2 \cdot 10^{-r}$.

Se si vogliono usare le notazioni (1) e (2) si può osservare che la somma di due numeri dell'insieme ϑ è certo un numero reale minore di 2; ed in generale la somma di n numeri dell'insieme ϑ è certo un numero minore di n; in formule si ha

(5) $\vartheta + \vartheta = 2\vartheta$,

e in generale

(6) $\vartheta + \vartheta + \cdots + \vartheta\ (n\ volte) = n\,\vartheta$.

Quindi si ha:

(7) $\alpha + \beta = (a + b) + 2\,\vartheta 10^{-r}$.

Es. 1 - Avendosi

$\sqrt{3} = 1{,}732 + \vartheta 10^{-3}$; $\sqrt{5} = 2{,}236 + \vartheta 10^{-3}$, si ha $\sqrt{3} + \sqrt{5} = 3{,}968 + 2\,\vartheta 10^{-3}$, o anche $3{,}968 < \sqrt{3} + \sqrt{5} < 3{,}970$.

Es. 2 - Sia da calcolare la somma S delle radici quadrate dei primi 5 numeri interi, ognuna delle radici essendo calcolata con un errore minore di 10^{-7}.

Si ha $S = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}$;

ora è

$\sqrt{1}$ = 1

$\sqrt{2}$ = $1{,}4142135$ + $\vartheta 10^{-7}$

$\sqrt{3}$ = $1{,}7\,320508$ + $\vartheta 10^{-7}$

$\sqrt{4}$ = 2

$\sqrt{5}$ = $2{,}\,2360679$ + $\vartheta 10^{-7}$

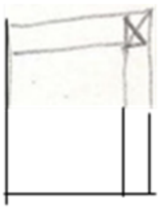
$S = 8{,}3823322 + 3\,\vartheta 10^{-7}$, ossia $8{,}3823322 < S < 8{,}3823325$.

Esercizio - Si calcoli il valore della somma dei reciproci dei primi 10 numeri interi, cioè il valore della somma
$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$ con 10 cifre decimali esatte.

1.33 *Prodotto con valori approssimati*

Si voglia ora eseguire il prodotto dei due numeri α e β per cui valgono le condizioni § 1.32-1,2. Applicando le considerazioni del § 1.29 si giunge a scrivere

(1) $ab < \alpha\beta < (a+b)10^{-r} + 10^{-2r}$.



Qualora si vogliano applicare le notazioni introdotte nel § 1.31 si osservi che il prodotto di due numeri reali minori di 1 è ancora un numero reale minore di 1, ossia il prodotto di due (o più) fattori ϑ è ancora un numero ϑ; in formule

(2) $\vartheta \times \vartheta = \vartheta$,

ed anche

(3) $\vartheta \times \vartheta \times \ldots .\ \vartheta\,(n\ volte) = \vartheta.$

Di qui, tenendo conto delle (§ 1.53-1,2) si ha

(4) $\alpha\beta = ab + (a+b)\,\vartheta 10^{-r} + \vartheta 10^{-2r}$.

Si noti che in molti casi, quando r è abbastanza grande, l'ultimo addendo del secondo membro della (4) è trascurabile nei confronti del secondo.

L'applicazione della (1) o della (4) conducono alla conclusione non sempre attesa che buona parte delle cifre decimali che l'Aritmetica pratica insegna a calcolare nel prodotto di due numeri non hanno significato.

Es. 1 - Sia da calcolare la lunghezza L della circonferenza che passa per i vertici del quadrato di lato 1 (uno); allora (come è noto dalla Geometria elementare) la diagonale d del quadrato (che è anche diametro della circonferenza) è data da

(5) $d = 1{,}414213 + \vartheta 10^{-6}$,

e d'altra parte per il noto numero π (rapporto tra lunghezza della circonferenza e quella del diametro) si ha

(6) $\pi = 3{,}141592 + \vartheta 10^{-6}$.

Tenendo conto della (1) si ha

(7) $ab = (1{,}414213)(\,3{,}1415\,2\,) = 4{,}442880249760$,

e d'altra parte si ha

(8) $a + b = 4{,}555805$

quindi applicando la (1) si ottiene:

(9) $4{,}\,442880\,247096 < L < 4{,}442884792903$.

Si deduce di qui che le "*cifre esatte*" del prodotto sono soltanto cinque dopo la virgola, mentre l'Aritmetica pratica insegna a calcolarne 12.·Si ha invero:

(10) $L = 4{,}442800 + 5\vartheta 10^{-6}$,

come si otterrebbe facilmente anche dalla (4), tenendo conto del fatto che in base alla (8) si ha che la somma

$a+b$ è minore di 5 e quindi può essere scritta nella forma 5ϑ.

Esercizio - Calcolare partendo da valori approssimati dei fattori (letti sulle tavole numeriche o calcolati) e valutare l'ordine di approssimazione:
$\sqrt{5}\sqrt{6}$; $\sqrt{3}\sqrt{2}$; $\frac{1}{7}\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{63}\,\sqrt{101}$; π^2.

1.34 *Differenza con valori approssimati*
Si voglia ora calcolare la differenza dei due numeri α e β, supposta soddisfatta la condizione
(1) $\alpha > \beta$.
Sempre conservando le notazioni del § 1.32, supponendo anche che sia
(2) $a > b + 10^{-r}$,
tenendo conto di quanto è stato detto nel § 1.28, si ha che
(3) $a-b-10^{-r} < \alpha-\beta < a-b+10^{-r}$.

Volendo fare uso delle notazioni introdotte nel § 1.31 si può osservare che dalla (3) si deduce che la differenza $a-b-10^{-r}$ fornisce un valore di $\alpha-\beta$ con errore minore di $2(10^{-r})$. Pertanto, si può scrivere
(4) $\alpha-\beta = a-b-10^{-r}+2\vartheta 10^{-r}$.
Alla formula precedente si può giungere anche direttamente purché si applichi al simbolo ϑ la seguente legge di calcolo:
(5) $\vartheta-\vartheta = -1+2\vartheta$.

Es. 1 - Si voglia calcolare
(6) $D = \sqrt{5}-\sqrt{3}$.
Utilizzando i valori già dati in (§ 1.32-Es.2) si ha dalla (3): $0{,}5040170 < D < O{,}5040172$, e dalla (4)
$D = 0{,}5040170 + 2\,\vartheta 10^{-7}$.

Esercizio 1 - Calcolare le seguenti differenze, determinando l'ordine di approssimazione dei risultati a partire da quello dei dati:
$1/7 - 1/9$; $1/1{,}02 - 1/1{,}05$; $22/7 - \pi$.

Esercizio 2 - Valutare con 10 cifre decimali esatte la seguente espressione:
$S = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$.

1.35 *Quoziente con valori approssimati*
Si voglia ora calcolare un valore approssimato del quoziente di due numeri reali α e β. Tratteremo qui anzitutto il caso particolare in cui si abbia
(1) $\alpha = 1$, essendo sempre β dato dalla (§ 1.32-2).
Avendosi
(2) $b < \beta < b + 10^{-r}$,
si ha di conseguenza (cfr.§1.20 - Es. 1):
(3) $1/(b+10^{-r}) < 1/\beta < 1/b$.
In altre parole, $1/(b+10^{-r})$ dà un'approssimazione per difetto del numero $1/\beta$ (che viene chiamato "*inverso*" o anche "*reciproco*" di β, mentre $1/b$ ne dà un valore approssimato per eccesso (Cfr.§ 1.29). Inoltre, è
(4) $1/b - 1/(b+10^{-r}) = 10^{-r}/(b\,(b+10^{-r})) < 10^{-r}/b^2$,
e quindi l'errore che si commette assumendo $1/(b+10^{-r})$ come valore approssimato per difetto di $1/\beta$ è minore di $10^{-r}/b^2$. Con le notazioni introdotte nel § 1.28 si avrà:
(5) $1/\beta = 1/(b+10^{-r}) + \vartheta\ 10^{-r}/b^2$.
Analogamente, tenendo conto delle (3) e (4) potremo scrivere

(6) $1/\beta = 1/b - \vartheta \; 10^{-r}/b^2$,
infine tenendo conto della (§1.34 -5), la (5) può scriversi
(7) $1/\beta = 1/b + (2\,\vartheta - 1) \; 10^{-r}/b^2$.

Es. 1 - Si calcoli un valore approssimato per difetto del numero reale $1/\sqrt{2}$ con errore minore di 10^{-6}.
A tal fine, ricordando che è $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots..$, basterà assumere $b = 1{,}414213$, ed eseguire la divisione $1/1{,}414214$ con le regole dell'Aritmetica pratica, arrestando le operazioni quando si siano ottenute sei cifre decimali del quoziente. Si ha: $1/\sqrt{2} = 0{,}707106 + \vartheta 10^{-6}$.

Es. 2 - Ricordando che è $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$, si controlli il risultato ottenuto.

Es. 3 – Assumendo $\pi = 3,1415926535 + \vartheta 10^{-10}$ si calcoli $1/\pi$ e si valuti l'approssimazione del risultato ottenuto.

1.36 - Abbandoniamo ora l'ipotesi restrittiva (§ 1. 35-1) e domandiamoci di calcolare il quoziente di due numeri reali α e β per cui valgono le (§1.32 - 1,2). Tenendo presente anche quanto è stato detto nel § 1.29 si ottiene
(1) $(a + 10^{-r})/b > \alpha/\beta > a/(b + 10^{-r})$,
e avendosi
(2) $1/(b + 10^{-r}) > (b - 10^{-r})/b^2$,
si ottiene in definitiva
(3) $(a + 10^{-r})/b > \alpha/\beta > a\,(b + 10^{-r})/b^2$.
Ora la differenza tra il primo e l'ultimo membro di queste diseguaglianze è
(4) $(a + 10^{-r})/b - a(b - 10^{-r})/b^2 = ((a + b)/b^2)10^{-r}$,
e pertanto si ha
(5) $\alpha/\beta = a/(b + 10^{-r}) + \vartheta 10^{-r}\,(a + b)/b^2$.
Questa formula permette di valutare l'errore che si commette assumendo il numero $a/(b + 10^{-r})$ come valore approssimato del quoziente α/β, e permette quindi di arrestare l'operazione al momento opportuno per evitare di calcolare cifre senza significato.

Es. 1 – Siano
(6) $\alpha = \sqrt{5}$; $\beta = \sqrt{2}$, e·si voglia calcolare α/β. Ponendo
(7) $a = 2{,}23606 + \vartheta 10^{-5}$; $\beta = 1{,}41421 + \vartheta 10^{-5}$
e quindi
(8) $a = 2{,}23606$; $b = 1{,}41421$, si ha, applicando la (5)
(9) $(a + b)/b^2 = 3{,}65027/1{,}9999899241 < 2$,
e pertanto l'errore che si commette assumendo il numero $2{,}23606/1{,}41422$ come valore approssimato di $\sqrt{5}/\sqrt{2}$ può essere scritto nella forma $2\,\vartheta 10^{-5}$. Eseguiti i calcoli si ha
(10) $\sqrt{5}/\sqrt{2} = 1,58112 + 2\vartheta 10^{-5}$,
o anche, se si vuole,
$1,58112 < \sqrt{5}/\sqrt{2} < 1,58114$.

Esercizio - Calcolare $\sqrt{2}\,/\pi$ assumendo per π il valore approssimato dato da (§ 1.33 - 6) e valutare l'ordine di approssimazione del risultato.

1.37 *Calcolo della radice quadrata di un numero*
Come applicazione di ciò che abbiamo detto sulle proprietà formali delle operazioni razionali e dei cenni sulle approssimazioni decimali dei numeri reali, possiamo rivedere qui le regole che l'Aritmetica Pratica insegna per ciò che viene chiamato il *calcolo della radice quadrata di un numero* e che sarebbe forse meglio indicare come "calcolo di una approssimazione decimale della radice quadrata di un numero razionale".

Sia α un numero razionale e sia a il numero razionale decimale che fornisca una approssimazione decimale (cfr. § 1.52) per difetto a meno di $10^{-r}(r > 0)$ della radice quadrata di α; si avrà quindi

(1) $a < \sqrt{\alpha} < a + 10^{-r}$.

Di qui si ha come immediata conseguenza

(2) $a^2 < \alpha < (a + 10^{-r})^2$.

Si voglia ora determinare una ulteriore "cifra esatta" della radice quadrata di α, cioè si voglia trovare un intero n soddisfacente alle limitazioni

(3) $0 < n < 9$

tale che si abbia

(4)$(a + n10^{-(r+1)})^2 < \alpha < (a + (n+1)10^{-(r+1)})^2$.

Dalla (4) sviluppando il quadrato del binomio al primo membro si ottiene:

(5) $a^2 + 2na\, 10^{-(r+1)} + n^2 10^{-2(r+1)} < \alpha$, e quindi

(6) $a^2 + n10^{-(r+1)}\left(2a + n10^{-(r+1)}\right) < \alpha$.

La (6) si può anche scrivere nella forma:

(7) $n\, 10^{-(r+1)}\left(2a + n10^{-(r+1)}\right) < \alpha - a^2$, che, tradotta in parole, viene espressa dalla nota regola della Aritmetica Pratica:

Sia dato un numero decimale a che fornisce un'approssimazione della radice quadrata del numero reale α per difetto con errore minore di 10^{-r} ($r > 0$). (*Come è noto, si usa dire più brevemente "Sia data la radice quadrata approssimata di* α *con* r *cifre esatte* ") . Un'ulteriore cifra decimale n è data dal massimo intero tale che, moltiplicando per $n10^{-(r+1)}$ il numero che si ottiene scrivendo il doppio del valore approssimato a della radice già calcolata ed alla sua destra la cifra n, il prodotto che si ottiene sia minore della differenza tra α ed a^2.

Es. 1 - Fatti $\alpha = 11$, $r = 2$, si ha: $3{,}31^2 < 11 < 3{,}32^2$; in questo caso è $a = 3{,}31$, quindi

$\alpha - a^2 = 11 - 10{,}9561 = 0{,}0439$. Inoltre, si ha $2a = 6{,}62$.

Si osservi ora che il numero $2a + n10^{-(r+1)}$ si ottiene in questo caso semplicemente scrivendo la cifra n a destra dell'ultima cifra decimale di $6,62$. Il massimo intero n soddisfacente alle limitazioni (3) e per cui si abbia $6{,}62n \cdot n\, 10^{-3} < \alpha - a^2 = 0{,}0439$ è in questo caso 6. Infatti, si ha: $6{,}626 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 0{,}039756$, mentre è $6{,}627 \cdot 7 \cdot 10^{-3} = 0{,}046389$.

Avremo quindi $\sqrt{11} = 3{,}316 + \vartheta 10^{-3}$; la disposizione abitualmente più comoda dei calcoli è insegnata dalla Aritmetica Pratica.

1.38 - Le osservazioni fatte a proposito dell'approssimazione del prodotto di due numeri reali (cfr. § 1.33) possono essere applicate in particolare alla ricerca della radice quadrata approssimata di un numero reale α del quale si conoscano r cifre decimali esatte (con $r > 0$), cioè si conosca un'approssimazione decimale con errore minore di 10^{-r}.

Poniamo che sia

(1) $\alpha = a + \vartheta 10^{-r}$,

essendo a un numero decimale che, in base alla (1), fornisce un'approssimazione di α per meno di 10^{-r} ; qui poniamo che ϑ non sia nullo (invero in caso contrario ricadremmo nel procedimento che abbiamo visto nel paragrafo precedente).

Ricordiamo che per ipotesi la radice quadrata di α è un numero reale che si indica con il simbolo

(2) $\xi = \sqrt{\alpha}$,

e per il quale vale la relazione

(3) $\xi^2 = \alpha$.

Poniamo ora la seguente definizione:

Df. 1 - Diciamo che il numero razionale decimale x fornisce s "cifre esatte" di $\sqrt{\alpha}$ se valgono entrambe le relazioni seguenti:

(4) $x^2 < \alpha = a + \vartheta 10^{-r}$, (4)$'$ $x^2 - a < \vartheta 10^{-r}$,

(5) $(x + 10^{-s})^2 > a + 10^{-r}$.

Osserviamo ora che il razionale x può essere concretamente determinato soltanto come un valore approssimato della radice quadrata del numero razionale a. Si ha dunque per ipotesi

(6) $x^2 \leq a$,

con che resta soddisfatta anche la (4) ed inoltre

(7) $(x + 10^{-s})^2 > a$,

con che non è detto che resti soddisfatta la (5). Anzi per s abbastanza alto questo non avverrà. In altre parole, è vero che il procedimento abituale consente di proseguire indefinitamente la ricerca delle cifre esatte della radice quadrata di a, ma non tutte queste saranno anche cifre esatte della radice quadrata di α, secondo la definizione che ne abbiamo data. Esisterà pertanto un massimo valore di s, cioè una massima approssimazione oltre la quale non è consigliabile spingere il calcolo perché si otterrebbero delle cifre prive di significato per la determinazione delle cifre esatte della radice quadrata di α.

Per determinare tale valore di s poniamo qui

$$\xi = x + \vartheta 10^{-s}.$$

Dalle (1) e (3) si ha quindi

$$x^2 + 2\vartheta x 10^{-s} + \vartheta 10^{-2s} = a + \vartheta 10^{-r},$$

e pertanto, per soddisfare la (5), occorre assumere come valore di s il massimo intero per il quale sussiste la relazione

(8) $10^{-s}\,(2x + \vartheta 10^{-s}) > 10^{-r}$.

Es. 1 - Si ponga

(9) $\alpha = 10/3$

e si assuma una rappresentazione decimale di α con 3 cifre decimali esatte, cioè si ponga

(10) $\alpha = 3{,}333 + \vartheta 10^{-3}$.

Per determinare $\sqrt{\alpha}$ si calcola la radice quadrata del numero razionale 3,333 e si ha

(11) $\sqrt{3{,}333} = 1{,}82565 + \vartheta 10^{-5}$,

ma ovviamente non tutte le cifre esatte date della (11) sono anche cifre esatte della $\sqrt{\alpha}$, secondo la definizione da noi data; invero si ha:

$$1{,}825^2 = 3{,}330625 < 3{,}333$$
$$1{,}826^2 = 3{,}334276 > 3{,}334$$

Invece è

$$1{,}8256^2 = 3{,}3328156 < 3{,}333$$
$$1{,}8257^2 = 3{,}33318049 > 3{,}333.$$

E quest'ultimo valore è bensì maggiore di 3,333 ma non di 3,334. Pertanto, assumendo per α l'approssimazione data dalla (10) non è possibile determinare più di tre cifre decimali esatte (dopo la virgola) di α, avendosi precisamente $\sqrt{\alpha} = 1{,}825 + \vartheta 10^{-3}$, e ciò si accorda con i risultati della discussione precedente ed in particolare con la (8).

Esercizio 1 - Il lettore calcoli $\sqrt{\alpha}$, ponendo $\sqrt{\alpha} = \sqrt{10}/\sqrt{3}$, calcolando un numero opportuno di cifre esatte delle due radici quadrate e valutando l'approssimazione del quoziente, in base a quanto è stato detto, in modo da avere sei cifre esatte di $\sqrt{\alpha}$.

Si assuma $\sqrt{10} = 3{,}1622776 \ldots\ldots$; $\sqrt{3} = 1{,}7320508 \ldots\ldots$.

Esercizio 2 - Calcolare $\sqrt[4]{2} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{2}}$ con 5 cifre decimali esatte.

1.39 *Sistemi di numerazione*

Diamo qui un cenno sui sistemi di numerazione che usano convenzioni diverse da quelle abitualmente usate per i calcoli e sono di notevole importanza concettuale. Come è noto il nostro metodo abitualmente usato per rappresentare i numeri è diverso da quello che veniva usato da vari popoli antichi, per esempio Greci e Romani, ed è basato su varie convenzioni: vi è anzitutto la scelta di una "*base*" per la numerazione, base che è il numero 10, il che comporta la possibilità di rappresentare ogni numero usando soltanto di 10 segni (le 9 "*cifre significative*" e lo zero) la cui forma è ormai stabilizzata da un lungo processo storico. (Ovviamente non occorre che si conosca l'epoca di tala scelta, e neppure che essa sia stata fatta in modo cosciente ed esplicito ad un determinato istante, per poter concludere che la “base” è convenzionale. Probabilmente si trattò del consolidamento dell'abitudine di servirsi delle dita di entrambe le mani per contare. Rimangono però delle tracce storiche (per es. in alcune lingue e in alcuni sistemi antichi di numerazione) che vengono interpretate come prove dell’uso di altre basi di numerazione. Comunque sia, l'uso del 10 oggi ci appare “naturale” solo in base ad una abitudine radicata dall’uso di molte generazioni, non perché esso sia logicamente necessario).

In secondo luogo, vi è l'uso della cosiddetta “*convenzione di posizione*" in base alla quale per esempio scrivendo

$$5237$$

si conviene di rappresentare il numero

$$5 \cdot 10^{3} + 2 \cdot 10^{2} + 3 \cdot 10 + 7.$$

In generale si potrebbe dire che ogni cifra si conviene tacitamente moltiplicata per una potenza del 10 il cui esponente è dato dall'indice del posto della cifra stessa, contato a partire da destra, diminuito di una unità. Più in generale, quando si tratta di un numero non intero, scrivendo per esempio

$$256{,}825$$

si conviene di indicare il numero razionale

$$256 + 8 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3};$$

cioè quando esista la virgola ogni cifra a destra di essa si intende moltiplicata per una potenza di $1/10$ il cui esponente è dato dall'indice del posto della cifra, contato a partire dalla virgola.

Nulla vieta che venga usato un numero intero diverso da 10 come base della numerazione, purché sia diverso da 1, pur conservando la convenzione di posizione: basterà convenire che una cifra sia moltiplicata per una potenza della base, invece che per una potenza del 10, a seconda del posto che essa occupa, prima o dopo la virgola, con una regola perfettamente analoga a quella già esposta poco fa.

Fu proposto il numero 12, che d'altronde già rimane come base di diversi sistemi monetari nell'uso di certe tradizioni commerciali ma è ben difficile che una proposta cosiffatta possa essere accettata perché sconvolgerebbe troppe abitudini radicate, renderebbe necessaria l'introduzione di due nuove “cifre" e richiederebbe l'uso di nuove “tavole pitagoriche”. Invece si è rivelato di somma utilità l'uso della base 2, soprattutto per la possibilità di “rappresentare” un numero con sistemi fisici (circuiti elettrici, corpi magnetizzati, ecc.). Invero qualora si usi la base 2, cioè come si usa dire, qualora si usi il "*sistema binario*", occorrono soltanto due segni per rappresentare ogni numero: un segno per rappresentare l'unità, che per evitare confusioni potremmo indicare con il simbolo tipografico “!”, ed un segno per lo·zero, che indicheremo con il solito simbolo; ora si osserva che invece di segni tipografici si possono usare degli stati di certi sistemi fisici, che possono assumere soltanto due distinti stati. Per esempio l'unità può essere rappresentata dal passaggio del la corrente in un determinato circuito e lo zero dal “non passaggio”, oppure l'unità può essere rappresentata dallo stato di magnetizzazione di un determinato corpo e lo zero dallo stato di non magnetizzazione, ecc.

Come esempio diamo qui la rappresentazione binaria dei primi 20 numeri interi con le cifre e le convenzioni che abbiamo adottate:

1	!	11	!0!!
2	!0	12	!!00
3	!!	13	!!0!
4	!00	14	!!!0
5	!0!	15	!!!!
6	!!0	16	!0000
7	!!!	17	!000!
8	!000	18	!00!0
9	!00!	19	!00!!
10	!0!0	20	!0!00

Le operazioni si eseguiscono con procedimenti molto facili: per l’addizione valgono le regole immediate

(1) $0 + ! = ! + 0 = !$; $! + ! = !\,0$.

E per la moltiplicazione sussiste la semplicissima “tavola pitagorica”

	0	!
0	0	0
!	0	!

Ovviamente per raddoppiare un numero basta aggiungere una cifra 0 a destra della sua rappresentazione binaria, se non esistono cifre dopo la virgola, o spostare questa di un posto a destra se esistono cifre dopo la virgola.

La rappresentazione binaria di un intero si ottiene con regole semplicissime effettuando successive divisioni per 2, fino ad ottenere per quoto zero: per ogni divisione che dà per resto l'unità si ha una cifra "!" della rappresentazione binaria, per ogni divisione che dà per resto 0 si ha una cifra 0 della rappresentazione stessa, a partire dalla destra.

Esempio 1 - Si consideri il numero 37; una prima divisione per 2 dà per quoto 18 e resto 1 e pertanto la prima cifra a partire da destra della rappresentazione binaria è !. Il primo quoto diviso per 2 dà per quoto 9 e resto 0 e pertanto 0 sarà la seconda cifra; il 9 diviso per 2 dà quoto 4 e resto 1 e pertanto ! sarà la terza cifra, e così via. Al termine dell'operazione si avrà il 37 rappresentato nella forma $!\,00!\,0!$.

La giustificazione di questa regola si ha immediatamente dall'osservazione della forma binaria in cui il numero è rappresentato: invero se l'ultima cifra di destra è zero il numero è pari e sopprimendo tale cifra si ha la metà del numero stesso, se invece l'ultima cifra di destra è ! il numero è dispari e sopprimendo tale cifra si ha il quoto della divisione per 2 del numero (il resto è chiaramente 1, per ipotesi).

Esempio 2 - Si consideri la moltiplicazione di 37 per 19; essa può venir disposta nel modo seguente, perfettamente analogo a quello abituale:

```
      ! 0 0 ! 0 !
        ! 0 0 ! !
      ___________
      ! 0 0 ! 0 !
    ! 0 0 ! 0 !
! 0 0 ! 0 !
  ____________
! 0 ! 0 ! ! ! ! ! !
```

Questo numero, tradotto nei simboli abituali, dà: $2^9 + 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 703$.

Come esercizio invitiamo il lettore a trasportare in questa forma le regole che l'Aritmetica pratica fornisce per la ricerca della radice quadrata di un numero, tenendo presente quanto è stato detto in § 1.37.

In particolare, si ha per il numero $\sqrt{2}$ la seguente espressione:

$$\sqrt[!0]{!\,0} = !\,,0!\,10!\,01 + \vartheta\,!\,0^{-!!!}.$$

Esempio 3 - In base a ciò che precede si giustifica facilmente la regola nota che permette di operare la moltiplicazione di due interi facendo soltanto operazioni di somma, moltiplicazione per 2 e divisione per 2. (Questo procedimento viene attribuito a qualche popolazione primitiva).

Spiegheremo la regola su un esempio numerico: sia per esempio da moltiplicare 19 per 37.

Eseguiamo successivi raddoppiamenti del primo fattore e successive divisioni per 2 del secondo e sommiamo i risultati dei raddoppiamenti in corrispondenza ai quali si è avuto resto 1 dalla divisione corrispondente; il risultato della somma è il prodotto cercato. Per esempio nella seguente tabella sono dati: nella prima colonna i risultati delle successive divisioni per 2, nella seconda i resti delle divisioni, nella terza i risultati dei raddoppiamenti, nella quarta gli addendi che, secondo la regola, vanno sommati. Si verifica che la somma è 703, come si ottiene con i procedimenti soliti.

37	1	19	19
18	0	38	
9	1	76	76
4	0	152	
2	0	304	
1	1	608	608
			703

Un immediato confronto con la rappresentazione binaria del numero 37 permette di accertare che le cifre della seconda colonna corrispondono alle cifre di tale rappresentazione, da destra verso sinistra; anzi il procedimento delle successive divisioni per 2 coincide sostanzialmente con quello che abbiamo indicato per ottenere la rappresentazione binaria del numero. Pertanto, la somma che si esegue nella quarta colonna equivale esattamente a quella che si eseguirebbe operando la moltiplicazione di 19 per il 37 rappresentato esplicitamente come somma di opportune potenze del 2:

$$19 \cdot 37 = 19 \cdot (2^5 + 2^2 + 1).$$

1.40 *Numeri reali relativi*

La teoria che abbiamo svolta fin qui si riferisce ai numeri reali che vengono abitualmente detti "*assoluti*". Per essi, come è noto, si ha che ogni numero risulta essere maggiore di zero e che dati due numeri α e β, l'operazione di "differenza" (cfr. § 1.18) $\alpha - \beta$ è applicabile soltanto se è soddisfatta la condizione $\alpha \geq \beta$.

Ricordiamo brevemente qui come si possa stabilire una teoria dei numeri reali "*relativi*" a partire dai numeri reali assoluti con un procedimento che è perfettamente analogo a quello che si segue per la costruzione dei numeri razionali relativi a partire dai numeri razionali assoluti: i numeri reali relativi possono essere concepiti come delle coppie formate da un numero reale assoluto e da un segno, che può essere il segno "$+$" (più) oppure il segno "$-$" (meno) e che si premette al numero.

I numeri a cui è premesso il segno "$+$" si chiamano anche "*positivi*", quelli a cui è premesso il segno "$-$" si chiamano anche "*negativi*".

Il numero reale assoluto che si ottiene sopprimendo il segno davanti ad un numero reale relativo viene abitualmente chiamato "*valore assoluto*" o anche "*modulo*" di esso; indicato con α un qualunque numero reale relativo, il suo valore assoluto viene, come è noto, indicato con $|\alpha|$.

Come è chiaro, esistono sempre due (e non più) numeri reali che hanno lo stesso valore assoluto e segno diverso; essi si dicono "*opposti*" (tra loro).

Più in generale due numeri che hanno lo stesso segno vengono chiamati "*concordi*" e due che hanno segno diverso vengono chiamati "*discordi*".

Anche per i numeri reali relativi si dànno delle relazioni e delle operazioni le cui leggi ricapitoliamo qui brevemente e che sono formalmente analoghe a quelle che valgono per i numeri razionali relativi e che il lettore già conosce.

Si danno anzitutto tre relazioni fondamentali che vengono indicate con i simboli noti: "$=$", "$>$" e "$<$" ed hanno le stesse proprietà formali di quelle relazioni che sono indicate con gli stessi simboli e che valgono per i numeri razionali; per queste relazioni si stabiliscono inoltre le seguenti proprietà:

a) Due numeri reali relativi α e β si diranno "uguali" e si scriverà $\alpha = \beta$ soltanto se hanno lo stesso valore assoluto e lo stesso segno. Farà eccezione soltanto lo zero, per cui è valida la relazione : $-0 = +0$.

b) Ogni numero positivo è maggiore di zero e maggiore di ogni numero negativo; di due numeri positivi è maggiore quello che ha valore assoluto maggiore; di due numeri negativi è maggiore quello che ha valore assoluto minore.

c) Ogni numero negativo è minore di zero e minore di ogni numero positivo. Di due numeri positivi è minore quello che ha valore assoluto minore e di due numeri negativi è minore quello che ha valore assoluto

maggiore.
Per le operazioni tra numeri cosiffatti si pongono le seguenti definizioni:
d) La *somma* di due numeri reali relativi si indica con lo stesso simbolo che si usa per la somma di due numeri razionali relativi e per tale simbolo si stabiliscono le convenzioni che il lettore già conosce; essa è un numero tale che se gli addendi sono concordi è concorde con essi ed ha per valore assoluto la somma dei valori assoluti; se gli addendi sono discordi è concorde con quello che ha valore assoluto maggiore ed ha per valore assoluto la differenza tra i valori assoluti.
L'operazione di somma eseguita con queste modalità viene anche indicata come "somma algebrica". Si ha inoltre, da quanto precede, la relazione fondamentale
(1) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$,
il segno di uguaglianza valendo in particolare quando i due addendi sono concordi.

e) La *differenza* tra due numeri reali relativi α e β si definisce come la somma del minuendo con il numero opposto del sottraendo; si ha inoltre la relazione fondamentale
(2) $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha| \geq |\alpha| - |\beta|$, se è $|\alpha| \geq |\beta|$,
oppure
(2') $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha| \geq |\beta| - |\alpha|$, se è $|\beta| \geq |\alpha|$.

f) Il *prodotto* di due numeri reali relativi ha per valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori ed ha il segno positivo se i fattori sono concordi, il segno negativo se i fattori sono discordi. In particolare, l'opposto di un numero reale α si può considerare ottenuto moltiplicando α stesso per il numero reale (-1).

g) Il *quoziente* di due numeri reali relativi ha valore assoluto uguale al quoziente dei valori assoluti ed è positivo se i numeri sono concordi, negativo se sono discordi.

Si verifica facilmente che, come abbiamo detto, per le relazioni e per le operazioni che abbiamo qui ricordato valgono le proprietà formali che sono valide per le relazioni e le operazioni tra numeri razionali relativi. Pertanto, le regole formali di calcolo rimangono immutate. Quindi, utilizzando la nomenclatura introdotta precedentemente potremmo dire qui che anche i numeri reali relativi, come i numeri razionali relativi, formano un "*corpo numerico*".

1.41 *Estrazione di radice n-esima nel corpo numerico dei numeri reali relativi*
Un'importante conseguenza delle regole di calcolo per i numeri reali relativi che abbiamo esposto nel paragrafo precedente si ha nell'eseguire l'operazione di estrazione di radice n-esima nel corpo numerico dei numeri reali relativi. Invero come immediata conseguenza della regola f) del paragrafo precedente si ha che una potenza con esponente intero positivo pari di un numero reale positivo è sempre positiva; una potenza con esponente intero positivo dispari di un numero reale relativo ha il segno della base.
Abbiamo visto (§ 1.23) che, considerato un numero reale assoluto α, esiste un altro numero pure reale assoluto x che soddisfa alla relazione
(1) $x^n = \alpha$
dove n è intero positivo qualunque; tale numero x viene chiamato, come è noto, la radice " n-esima" del numero α e viene indicato con il simbolo
(2)$x = \sqrt[n]{\alpha}$.
Se invece α fosse un numero reale relativo, da quanto è stato detto poco fa consegue che:
a) se n è un intero positivo pari allora la potenza x^n è sempre un numero positivo qualunque sia il segno della base x e quindi l'equazione (1)
a1) non è risolubile se α è un numero negativo
a2) ammette due soluzioni l'una opposta dell'altra se α è un numero positivo.

b) se n è un intero positivo dispari l'equazione (1) ammette una sola soluzione che ha il segno di α.

Si suole esprimere questo fatto dicendo che l'operazione di estrazione di radice n-esima (simboleggiata dalla (2) ed equivalente alla risoluzione dell'equazione (1)) non è applicabile senza restrizioni nel campo dei numeri reali relativi.

Invero, se nella (2) n è pari, deve essere α positivo (come è noto, α viene chiamato il "*radicando*") perché il risultato abbia senso, ed allora esistono due numeri opposti che sono indicati con lo stesso simbolo. Se invece n è dispari, esiste un unico numero indicato dal simbolo (2) e tale numero ha il segno di α. Come è noto, si suole chiamare "*estrazione di radice nel campo algebrico*" o anche semplicemente "*estrazione di radice algebrica*" l'operazione (2) applicata a numeri reali relativi; corrispondentemente viene chiamata "*estrazione di radice aritmetica*" l'operazione su numeri reali assoluti introdotta nel § 1. 23; il numero reale assoluto che è radice n-esima del numero reale assoluto α viene chiamato anche "valore aritmetico" della radice di α. Per evitare possibili equivoci rilevati possiamo convenire di indicare con il simbolo $\sqrt[n]{\alpha}$ il maggiore tra i numeri (se esistono) che soddisfano alla (1) (l'aggettivo "maggiore" essendo inteso nella accezione spiegata nel § 1.16). Pertanto, se n è dispari il simbolo (2) indicherà l'unica soluzione esistente della (1), se n è pari ed $\alpha > 0$ il simbolo (2) rappresenterà la soluzione positiva della (1); in questo secondo caso qualora si vogliano indicare entrambe le soluzioni della (1) si conviene di premettere al simbolo $\sqrt[n]{\alpha}$ il doppio segno, e di scrivere quindi

$$\pm\sqrt[n]{\alpha}\ .$$

Albrecht Dürer – Melencolia.

New York, Metropolitan Museum

Nelle pagine successive si presenta il capitolo 6 del Testo, rieditato, da pag. 218 a pag. 235.

POTENZE A ESPONENTE REALE DEI NUMERI REALI
LOGARITMI

6. 0 *Richiami*

Richiamiamo qui brevemente le proprietà formali delle potenze a esponente intero relativo dei numeri reali. Avvertiamo anzitutto che qui e in tutto il presente capitolo quando parleremo di numeri reali intenderemo parlare salvo esplicito contrario avviso di numeri reali "*assoluti*", così come sono stati introdotti nel capitolo 1, nei paragrafi precedenti il paragrafo 1.60. In particolare nel presente paragrafo saranno da intendersi numeri reali assoluti tutte le basi delle potenze che verranno considerate, mentre gli esponenti saranno qui supposti essere interi.

La potenza a esponente n (con $n > 1$) di un numero reale α viene definita, come è noto (Cfr. 1.23-4), come prodotto di n fattori uguali ad α: $\alpha^n = \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha$ (n volte); dalle proprietà formali del prodotto (commutativa e associativa), e da quelle del quoziente, si ha immediatamente che, indicati con α e β i due numeri reali qualunque e con m e n due interi, valgono le proprietà espresse dalle formule seguenti, proprietà che il lettore farà bene a esprimere con parole per esercizio:

(1) $\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^{m+n}$
(2) $(\alpha \cdot \beta)^n = \alpha^n \cdot \beta^n$
(3) $(\alpha^m)^n = \alpha^{m+n}$
(4) $(\alpha/\beta)^n = \alpha^n/\beta^n$.

Si pone poi per convenzione: (Si noti che i significati dei simboli a^1 e a^0 vanno definiti a parte, essendo il concetto di potenza definito finora per un esponente intero e maggiore di 1; non ha quindi senso domandarsi le dimostrazioni delle (5) e (6) perché le definizioni sono sempre in larga misura arbitrarie. Occorre solo che esse non contraddicano a nessuna delle definizioni date in precedenza e a nessuna delle loro conseguenze).

(5) $\alpha^1 = \alpha$
(6) $\alpha^0 = 1$, e per n intero e positivo,
(7) $\alpha^{-n} = 1/\alpha^n$.

Si pone poi ulteriormente, qualunque sia la coppia di numeri interi m e n,

(8) $\alpha^m/\alpha^n = \alpha^{m-n}$. (Si noti che la (8) è dimostrata soltanto se $m > 0, n > 0$. L'estensione della sua validità al caso di una qualunque coppia di interi m e n, può avvenire soltanto per definizione e ha senso solo dopo le convenzioni (5), (6), (7).)

Le formule (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) esprimono quelle che vengono abitualmente chiamate le "*proprietà formali*" delle potenze (a esponente intero).

Si ha poi immediatamente che supposto

(9) $m > n$, vale
(10) $\alpha^m > \alpha^n$ se $\alpha > 1$,
(11) $\alpha^m < \alpha^n$ se $\alpha < 1$;

e infine se è $\alpha = 1$ è anche $\alpha^n = 1$ qualunque sia n.

Esercizio – Si dimostrino le (10) e (11) tenendo conto delle proprietà dei numeri reali.

6.1 *Potenze di numeri reali con esponente razionale. Proprietà formali*

Nel paragrafo precedente abbiamo richiamato le proprietà formali delle potenze a esponente intero dei numeri reali. Supponiamo ora che n sia un numero razionale (che per ora supporremo anche positivo) e poniamo dunque

(1) $n = p/q$,

dove p e q sono due interi positivi, e poniamo la seguente Df. 1:

(2) $\alpha^n = \alpha^{p/q} = \sqrt[q]{\alpha^p}$.

In altre parole definiamo come valore di $\alpha^{p/q}$ quel numero x tale che valga la seguente relazione:

(3) $x^q = \alpha^p$.

In particolare quindi porremo

(4) $\alpha^{1/n} = \sqrt[n]{\alpha}$.

La Df. 1 viene abitualmente considerata come fondamentale per l'estensione del concetto di potenza al caso di esponenti razionali, e viene giustificata facendo vedere che per le potenze ora definite, quando si mantenga valida la convenzione (§ 6.0 -7), valgono le stesse proprietà formali che vigono per le potenze a esponente intero e che sono espresse dalle (6.0-1, 2, 3, 4 e 8).

Validità delle (§ 6.0-1 e 8). Anzitutto si ha, indicando con u un intero qualunque

(5) $\alpha^{up/uq} = \alpha^{p/q}$.

Infatti, $\alpha^{p/q}$ è per definizione il numero x che soddisfa alla (3); pertanto elevando a potenza u entrambi i membri della (3) stessa si ha

(6) $x^{uq} = \alpha^{up}$,

relazione che, confrontata con la (3), dimostra la (5).

Consideriamo ora un secondo razionale m pure positivo

(7) $m = r/s$

dove r e s sono interi, e consideriamo il numero

(8) $\alpha^m = \alpha^{r/s} = \sqrt[s]{\alpha^r}$;

per definizione esso è il numero y che soddisfa

(9) $y^s = \alpha^r$.

Elevando ambo i membri della (3) a potenza s-esima e ambo i membri della (9) a potenza q-esima, si avrà:

(10) $x^{qs} = \alpha^{ps}$;

(11) (11) $y^{qs} = \alpha^{qr}$.

Moltiplicando membro a membro la (10) e la (11) e tenendo conto delle (§ 6.0-1 e 2) (Notiamo che le (§ 6.0-1 e 2) sono qui applicabili perché per ipotesi p, q, r, s sono interi) otteniamo:

(12) $xy^{qs} = \alpha^{ps+qr}$, ossia per definizione

(13) $xy = \alpha^{(ps+qr)/qs} = \alpha^{p/q+ r/s}$.

Avendosi, sempre per definizione,

(14) $x = \alpha^{p/q}$; $y = \alpha^{r/s}$,

la (13) dimostra che la (§ 6.0-1) è valida anche quando gli esponenti sono numeri razionali e non solo interi, purché diamo alla potenza con esponente razionale il senso precisato dalla Df. 1.

Se invece di moltiplicare membro a membro la (10) e la (11) avessimo effettuato la divisione avremmo ottenuto la dimostrazione della (§ 6.0-8) per esponenti razionali.

Validità delle (§ 6.0-2 e 4). Sia ora β un altro numero reale e sia

(15) $z = \beta^{p/q}$, cioè sia z la soluzione dell'equazione

(16) $z^q = \beta^p$.

Moltiplicando membro a membro la (16) e la (13) e tenendo conto della (§ 6.0-2) si ha $xz^q = \alpha\beta^p$, ossia $xz = \alpha\beta^{p/q}$. Tenendo presenti la prima delle (14) e la (16) questa relazione mostra che la (§ 6.0-2) è valida anche nel caso di esponenti razionali.

Infine dividendo membro a membro la (3) e la (16) e tenendo presente la (§ 6.0-4) si ottiene la dimostrazione della validità di questa anche per esponenti razionali.

Validità della (§ 6.0-3). Consideriamo ora x data dalla (3) e sia

(17) $t = x^{r/s}$, cioè sia t la soluzione dell'equazione

(18) $t^s = x^r$.

Elevando entrambi i membri della (18) a potenza q-esima e tenendo presente la (§ 6.0-3) si ha:

$t^{sq} = x^{rq} = (x^q)^r$, e di qui per la (3): $t^{qs} = (\alpha^p)^r = \alpha^{pr}$, ossia per definizione

(19) $t = \alpha^{pr/qs} = \alpha^{(p/q)\cdot(r/s)}$.

Pertanto confrontando la (19) con la (17) e tenendo conto della prima delle (14) si ottiene la dimostrazione della validità della relazione (§ 6.0-3) anche per esponenti razionali.

Possiamo pertanto concludere che le proprietà formali delle potenze esposte nel paragrafo precedente valgono anche quando gli esponenti m e n siano numeri razionali(e non solo interi), purché si adotti la definizione di potenza con esponente razionale da noi data e si conservino valide le convenzioni espresse dalle (§ 6.0-5,6 e 7). Si hanno di qui in particolare le note proprietà formali del calcolo dei radicali, proprietà che lasciamo formulare al lettore per esercizio.

Confronto di potenze. Supponiamo ora in particolare che si abbia

(20) $\alpha > 1$.

Allora è per la (2) e per le (§ 6.0-10 e 11)

(21) $\alpha^m > 1$ se $m > 0$

(22) $\alpha^m < 1$ se $m < 0$.

Se invece fosse

(23) $\alpha < 1$

si avrebbe, sempre per le relazioni invocate,

(24) $\alpha^m < 1$ se $m > 0$

(25) $\alpha^m > 1$ se $m < 0$.

Supponiamo poi che si abbia

(26) $m > n$

e che valga la (20); allora è

(27) $\alpha^m > \alpha^n$.

Invero dalle (26) si ha che è

(28) $d = m - n > 0$

e, come conseguenza della (21),

(29) $\alpha^d = \alpha^{m-n} > 1$,

e di qui, moltiplicando ambo i numeri per α^n e tenendo conto delle relazioni dimostrate si ha la (27).

Esercizi. Utilizzando gli sviluppi del presente paragrafo dimostrare le seguenti regole di calcolo coi radicali:

1. Moltiplicando o dividendo indice e esponente di un radicale per uno stesso numero, il radicale non cambia valore.
2. Il prodotto di due radicali aventi lo steso indice è un radicale avente lo stesso indice dei fattori e per radicando il prodotto dei radicandi.
3. Il quoziente di due radicali aventi lo stesso indice è un radicale avente lo steso indice e per radicando il quoziente dei radicandi.
4. Per ridurre più radicali allo stesso indice, si prende il minimo comune multiplo degli indici, che sarà il minimo indice comune, e si elevano i radicandi alla potenza avente per esponente il quoziente fra l'indice comune e l'indice che aveva prima il rispettivo radicale.
5. Per elevare a potenza un radicale, basta elevare a quella potenza il radicando.
6. La radice n-esima della radice m-esima è la radice di indice $m \cdot n$.

6.2 *Potenza a esponente reale di un numero reale (assoluto)*

Gli sviluppi del paragrafo precedente possono essere ulteriormente estesi, così da giungere all'introduzione del concetto di "*potenza a esponente reale*" di un numero reale (assoluto). Consideriamo un numero reale α e supponiamo per semplicità che sia

(1) $\alpha > 1$, (la restrizione (1) non è essenziale: si potrebbe dare una trattazione anche per il caso in cui sia $0 < \alpha < 1$, ma per brevità la omettiamo)

e sia m un numero reale che per il momento supponiamo positivo, dunque sia

(2) $m > 0$.

Come sappiamo, il numero reale m è costituito da un insieme completo superiormente limitato di numeri razionali. Detto r un numero razionale di questo insieme, consideriamo il numero reale x definito dalla relazione

(3) $x = \alpha^r$,

relazione che ha il senso determinato in base a ciò he è stato detto nel paragrafo precedente. L'insieme dei numeri reali x definiti dalla (3) è superiormente limitato, come si verifica subito osservando che l'insieme costituente m è superiormente limitato, e ricordando la (§ 6.1-27). Quindi in forza del teorema del § 1.40 l'insieme dei numeri reali x determina un unico numero reale ξ che è suo estremo superiore. Questo numero ξ sarà definito come il valore della potenza α^m ; porremo quindi

(4) $\xi = \alpha^m$.

Conveniamo che valgano anche in questo caso le (§ 6.0-5 e 6), e poniamo anche qui per definizione

$$\alpha^{-m} = 1/\alpha^m.$$

Si perviene così a dare un senso alla potenza α^m quando m sia un numero reale qualunque (anche negativo).

Proprietà delle potenze a esponente reale. Dagli sviluppi del paragrafo precedente e dalle definizioni ivi date si potrebbe facilmente dimostrare la validità delle (§ 6.0-1, 2, 3, 4 e 8), anche quando m e n sono due numeri reali qualunque. Diamo qui un cenno della dimostrazione della (§ 6.0-1) in questo caso, per dare un esempio del metodo che si segue. Siano dunque m e n due numeri reali, e supponiamo per il momento che essi siano anche positivi. Allora ognuno di essi è costituito da un insieme superiormente limitato di razionali (assoluti). Sia r un numero razionale appartenente al primo insieme (quello che costituisce m) e sia s un numero razionale appartenente al secondo. Per ogni coppia di numeri razionali r e s vale la relazione

(5) $\alpha^r \cdot \alpha^s = \alpha^{r+s}$,

in conseguenza di quanto dimostrato nel paragrafo precedente. Ora la (5) esprime il fatto che i due insiemi superiormente limitati di numeri reali, l'uno dato da tutti i numeri del tipo $\alpha^r \cdot \alpha^s$, l'altro da tutti i numeri del tipo α^{r+s} , coincidono; quindi, per la definizione data di potenza a esponente reale, si ha $\alpha^m \cdot \alpha^n = \alpha^{m+n}$ almeno nell'ipotesi che m e n siano numeri reali positivi; la convenzione (4) permette poi di estendere la validità della dimostrazione al caso in cui m e n siano numeri reali qualunque.

Lasciamo al lettore la dimostrazione della validità delle (§ 6.0-2, 3, 4 e 8) e della (§ 6.0-10).

Esercizio 1. Dare la definizione del numero reale $2^{\sqrt{5}}$.

Esercizio 2. Calcolare un valore approssimato del numero reale $10^{\sqrt{31}}$. Si tenga conto che si ha $\sqrt{31} = 5{,}5678 + \vartheta 10^{-4}$, e si assuma come valore approssimato di $\sqrt{31}$ il numero $5{,}5 = 11/2$.

6.3 *Logaritmo di un numero reale assoluto*

Consideriamo un numero reale a e supponiamo che si abbia

(1) $a > 1$.

Sia poi m un altro numero reale (assoluto). Esiste un unico ben determinato numero reale x tale che sia

(2) $a^x = m$.

Per dimostrarlo, supponiamo per il momento che sia anche

(3) $m > 1$

e consideriamo l'insieme di tutti i numeri razionali assoluti r tali che sia

(4) $a^r < m$.

In base alle (§ 6.1-21 e 25) si ha che l'insieme dei numeri r è superiormente limitato. Pertanto tale insieme, eventualmente reso completo, costituisce (secondo la definizione da noi data nel § 1.20) un numero reale x che soddisfa alla (2), in base alla definizione di potenza a esponente reale data nel paragrafo precedente.

Lasciamo ora cadere la (3) e supponiamo che sia

(3') $m < 1$, e poniamo $m' = 1/m$.

Allora m' risulta maggiore di 1, e pertanto esiste un n umero reale x' tale che si abbia $a^{x'} = m' = 1/m$.
In forza della (§ 6.2-4) abbiamo dunque $a^{-x'} = m$. Esiste quindi un numero reale negativo $x = -x'$ che soddisfa alla (2) anche se vale la (3).
Infine se è $m = 1$, si ha ovviamente, in forza della (§ 6.0-6), $x = 0$.

Poniamo ora la seguente
Df. 1 – Il numero reale x che soddisfa alla (2) viene chiamato "*logaritmo* del numero m nella base a" e indicato col simbolo

(5) $x = \log_a m$.

Pertanto la (5) equivale per definizione alla (2); analogamente valgono per definizione anche le seguenti:

(6) $m = a^{\log_a m}$,

(7) $y = \log_a a^y$.

Da quanto precede si ha immediatamente che valgono, sotto l'ipotesi (1), le relazioni

(8) $\log_a m < 0$, se è $m < 1$; $\log_a m = 0$, se è $m = 1$; $\log_a m > 0$, se è $m > 1$.

In particolare poi si ha

(9) $\log_a a = 1$.

Proprietà fondamentali dei logaritmi. Sia ora n un altro numero reale assoluto e sia y il suo logaritmo nella base a; valga cioè per definizione la

(10) $a^y = n$.

Moltiplicando o dividendo membro a membro la (3) per la (10) si ha, in forza delle proprietà formali delle potenze,

(11) $m \cdot n = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(12) $m/n = a^x/a^y = a^{x-y}$, e quindi per definizione

(13) $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$

(14) $\log_a m/n = x - y = \log_a m - \log_a n$.

Sia poi k un numero reale qualunque; elevando ambo i membri della (2) a potenza k-esima e tenendo conto della (§ 6.0-3) che abbiamo dimostrata valida anche per esponenti reali, abbiamo:

(15) $(a^x)^k = a^{kx} = m^k$, e quindi per definizione:

(16) $\log_a m^k = kx = k \log_a m$.

Di qui in particolare se k è un numero intero si ha la nota regola che dà il logaritmo di una potenza (a esponente intero), e se k è il reciproco di un intero si ha la regola per il logaritmo di una radice.

Regola del cambiamento di base. Sia b un altro numero reale assoluto; prendendo per ambo i membri della (2) il logaritmi nella base b e tenendo conto della (16) si ha

(17) $x \log_b a = \log_b m$, e quindi

(18) $\log_a m = \log_b m / \log_b a$.

La (18), espressa in parole, dà la cosiddetta "*regola del cambiamento di base*" dei logaritmi.

Siano infine a e b due numeri reali assoluti; si ha

(19) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Infatti, ponendo

(20) $x = \log_a b$, ossia $a^x = b$,

e prendendo poi i logaritmi nella base b di entrambi i membri si ha, applicando la (16) e la (9), $x \log_b a = 1$, e da questa tenendo conto della (20) si trae la (19).

Esercizi. 1. Determinare i logaritmi in base 3 dei seguenti numeri: $9,\ 81,\ 1/3\,,\ 1/27, \sqrt{3},\ \sqrt{27}, 1/\sqrt[3]{9}.$

2. Determinare i numeri che hanno i seguenti logaritmi in base 5: $-2, +3, -1/2,\ 0{,}6$.

6.4 *Logaritmi neperiani e decimali*

Abbiamo fin qui parlato dei logaritmi dei numeri senza precisare la base dei logaritmi stessi, base che abbiamo lasciata indeterminata.

Le proprietà fondamentali dei logaritmi sono espresse dalle (§ 6.3-13, 14, 16); esse esprimono sostanzialmente il fatto che se esiste la possibilità di conoscere il logaritmo x di un numero m in una base fissata a (e di conoscere m quando sia noto x), allora alle operazioni di moltiplicazione e di divisione viene a corrispondere l'operazione di somma e rispettivamente di differenza dei rispettivi logaritmi; e alla operazione di elevazione di un numero a potenza con esponente qualunque (in particolare quindi alla elevazione a potenza intera e alla estrazione di radice) viene a corrispondere l'operazione di moltiplicazione del corrispondente logaritmo per l'esponente. Ora esistono delle tavole che permettono di conoscere abbastanza facilmente il logaritmo x di un numero m..

....

Storicamente furono calcolati due tipi di tavole di logaritmi; vi sono tavole di logaritmi che vengono chiamati "*naturali*" o anche "*neperiani*" che usano come base un numero irrazionale abitualmente indicato con il simbolo e, il cui valore è

(1) $e = 2{,}7182818284 + \vartheta 10^{-10}$

L'uso di questi logaritmi è particolarmente utile nelle questioni di Matematica superiore, per certe loro notevoli proprietà...

Tuttavia per scopi pratici si usano abitualmente i logaritmi nella base del nostro sistema di numerazione, cioè nella base 10: questi logaritmi sono indicati come come logaritmi *decimali*, o *volgar*i, o *logaritmi d*i *Briggs*, e indicati con la notazione Log m...

Vogliamo qui accennare a una possibile definizione dei logaritmi decimali che è basata sulle proprietà delle potenze e del nostro sistema di numerazione.

Sia m intero positivo e sia

(2) $x = \text{Log}\, m$, dunque

(3)$10^x = m$.

Sia y il numero razionale che dà una rappresentazione decimale di x per meno di 10^{-r} ; si avrà quindi

(4) $y < x < y + 10^{-r}$.

In altre parole y è un numero decimale che ha r cifre dopo la virgola, e pertanto $y \cdot 10^r$ è un numero intero che chiameremo Y, ponendo quindi

(5) $10^r y = Y$.

Ora in base alla (§ 6.0-10), valida anche per esponenti reali, si ha: $10^y \leq m < 10^{y+10^{-r}}$, e elevando a potenza 10^r:

(6) $10^{10^r \cdot y} = 10^Y \leq m^{10^r} < 10^{Y+1}$.

Osserviamo ora che 10^Y è un numero con $Y + 1$ cifre e che 10^{Y+1} è il primo numero della serie naturale che abbia $Y + 2$ cifre. Pertanto dalla (6) si deduce che m^{10^r} possiede $Y + 1$ cifre. Di conseguenza Y può essere definito come *il numero delle cifre della potenza* m^{10^r} *diminuito di una unità*. Si ha poi per la (5) $y = Y10^{-r}$.