tero ANME sarebbe un quadrilatero birettangolo isoscele sulla base MN e gli angoli $M\hat{E}A$ (esterno al triangolo ECA e quindi maggiore dell'angolo ottuso $\hat{C}$) e $E\hat{A}N$ (minore dell'angolo retto $C\hat{A}N$) dovrebbero essere uguali. Analoga è la dimostrazione secondo la quale, nell'ipotesi dell'angolo acuto, si ottiene $CD > AB$.
Da queste proprietà discende direttamente che in un triangolo rettangolo la somma dei due angoli acuti è maggiore o minore di un angolo retto a seconda che ci si trovi nell'ipotesi dell'angolo ottuso o acuto (propp. 8ª e 9ª): dato il triangolo rettangolo DAB si traccia la perpendicolare per A al lato AB e si considera il punto C (fig. 4) in modo che

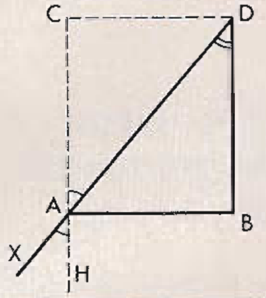


fig. 4

sia $AC = BD$. Congiungendo C con D si ha il quadrilatero birettangolo isoscele ABCD per cui, nell'ipotesi dell'angolo ottuso, si ha $CD < AB$. I triangoli CAD e ABD hanno pertanto due lati uguali e i terzi disuguali per cui l'angolo opposto al lato maggiore supera quello opposto al lato minore ($A\hat{D}B > C\hat{A}D$). Si ha pertanto $A\hat{D}B > X\hat{A}H$ $(= C\hat{A}D)$, cioè $A\hat{D}B + D\hat{A}B > X\hat{A}H + D\hat{A}B = 1\,R$ ($X\hat{A}H + D\hat{A}B$ è uguale ad un angolo retto perché uguale a $X\hat{A}D - B\hat{A}H$ cioè $2\,R - 1\,R$) c.d.d.
Per la dimostrazione del V postulato di Euclide eseguita da John Wallis è sufficiente ammettere la possibilità di poter considerare l'esistenza di un triangolo simile ad un triangolo dato e con i lati grandi a piacere, ammissione che risulta equivalente al postulato stesso. In altre parole, nelle geometrie non euclidee non esistono figure, e in particolare triangoli, simili e di grandezza diversa. Si potrebbe osservare facilmente che la proprietà ammessa da Wallis non si discosta molto da altre proprietà equivalenti al V postulato.
A conferma di quanto detto, menzioniamo un teorema di Lobačevskij da cui risulta che, in una geometria iperbolica, non esistono figure simili che non siano con ciò stesso anche uguali (congruenti). Infatti in un teorema che Lobačevskij pone nei suoi *Nuovi principi della geometria* viene dimostrato direttamente che in geometria iperbolica, nella quale la somma degli angoli interni di un qualunque triangolo è minore di due retti, se due triangoli hanno a due a due gli angoli uguali, cioè se sono simili, allora sono anche congruenti (fig. 5).

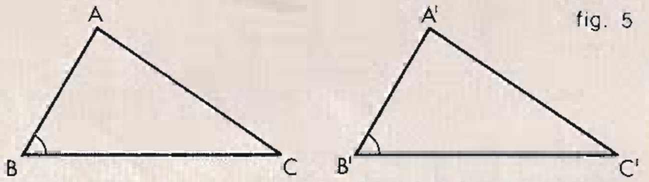


fig. 5

Hp. $\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$; $\hat{C} = \hat{C}'$; $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 2R$
Th. $ABC = A'B'C'$

Si riporti B' su B in modo che la retta B'A' coincida con la retta BA e la retta B'C' con la BC (ricordiamo che $B = B'$). Per dimostrare il teorema basta far vedere allora che i vertici A' e C' devono necessariamente coincidere con A e C. Se ciò non accade si giunge infatti ad un assurdo. Basta esaminare i tre casi indicati in fig. 6 che possono estendersi anche agli altri: in (a) e (b) si raggiunge subito l'assurdo osservando che si cade in contrasto con il teorema secondo cui l'angolo esterno di un triangolo è maggiore di ogni angolo interno non adiacente ($\hat{C}'$ dovrebbe risultare maggiore di $\hat{C}$ mentre per ipotesi gli è uguale). In (c) si può osservare che dall'uguaglianza degli angoli $\hat{A}'$ e $\hat{C}'$ con $\hat{A}$ e $\hat{C}$ si ottiene che la somma degli angoli interni del quadrilatero A'C'CA è di 4R ($A\hat{A}'C' = \pi - \hat{A}$ ecc.), mentre se si congiunge A' con C, si divide tale quadrilatero in due triangoli nei quali la somma degli angoli interni è per ognuno minore di 2R, in evidente contrasto con l'ipotesi della geometria iperbolica.

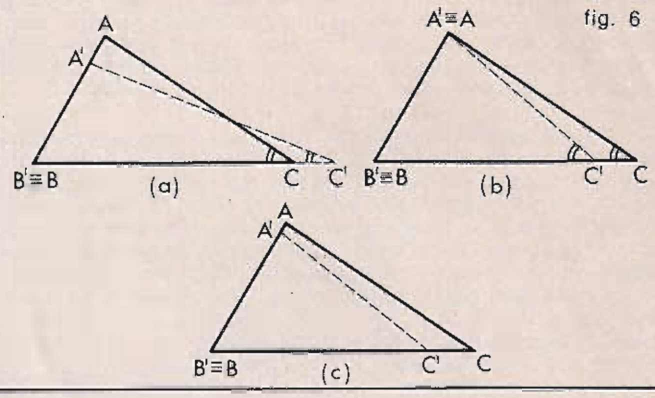


fig. 6

[A cura di Silvio Maracchia]

Alcune proposizioni equivalenti al V postulato di Euclide

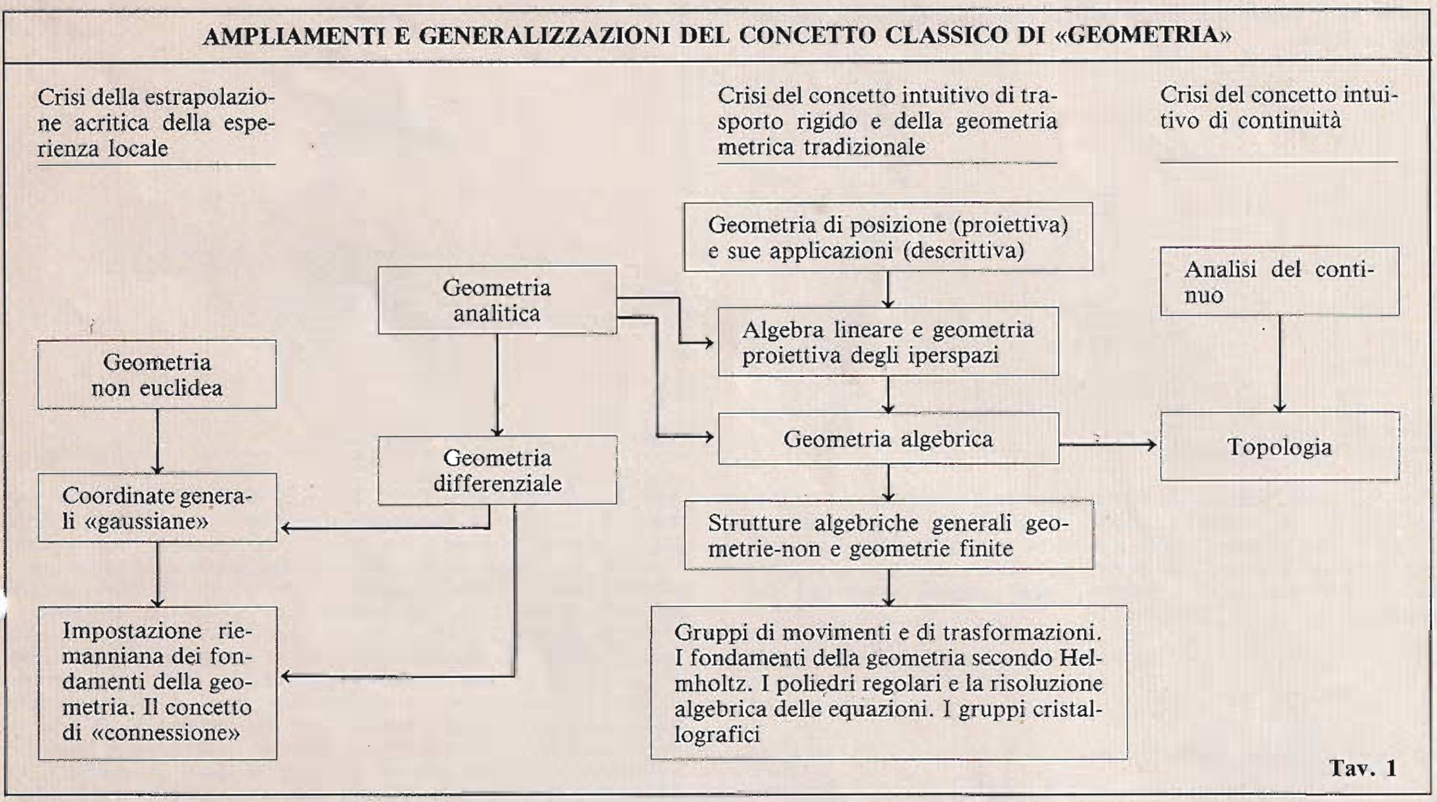
Nel corso degli articoli *sono già state enunciate le più famose tra le proposizioni equivalenti al V postulato euclideo. Ne esistono comunque parecchie altre, non poche delle quali forse insospettate per la loro familiarità e comunque di molto facile dimostrazione. Ne diamo un breve elenco, che potrà servire per far lavorare gli alunni in modo interessante. La loro presentazione, corredata da dimostrazione, si può trovare nell'articolo di D. Palladino,* Alcune proposizioni equivalenti al V postulato di Euclide, *in « Archimede », genn.-giu. 1979, 1-2, pp. 86-99.*

La somma degli angoli di un triangolo è costante.
La somma degli angoli di un triangolo ha un valore massimo.
L'angolo inscritto in una semicirconferenza è retto.
L'angolo inscritto in una semicirconferenza è costante.
L'angolo al centro di una circonferenza è doppio dell'angolo alla circonferenza corrispondente.
La somma degli angoli opposti di un quadrilatero inscrittibile in una circonferenza è due retti.
Il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo è uguale alla metà del terzo lato.
Teorema di Pitagora.
Le tre altezze di un qualsiasi triangolo passano per uno stesso punto.
I tre assi dei lati di un qualsiasi triangolo si incontrano in un punto.
Ogni quadrilatero può essere incluso all'interno di un triangolo.
A ogni cerchio può essere circoscritto un quadrato.
Il piano può essere ricoperto da poligoni regolari uguali solo se questi sono triangoli, quadrati, esagoni.
Il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro è costante.
La diagonale e il lato di un quadrato sono incommensurabili.
Non è mai possibile costruire con riga e compasso un quadrato equivalente ad un cerchio.
Le rette a due a due non incidenti hanno sempre una trasversale comune.
La proiezione ortogonale dei punti di una retta su un'altra retta non perpendicolare è una corrispondenza surgettiva.

[A cura di E. A.]

Ampliamenti del concetto di geometria

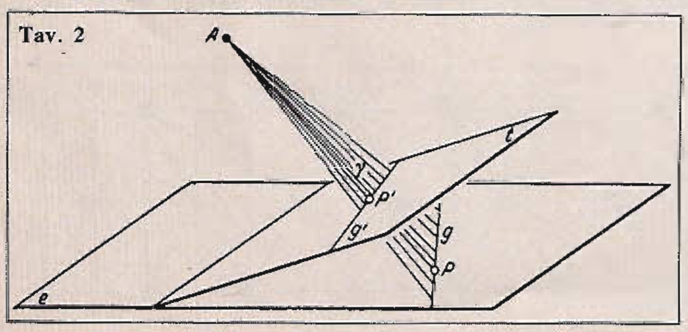
Le Tavole che riportiamo qui di seguito illustrano e completano con ampie didascalie quanto esposto nell'articolo pubblicato alle pp. 31-34.
In particolare le Tavv. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 si riferiscono ai concetti espressi nel terzo punto dell'articolo; le Tavv. 10, 11 al quarto punto e le Tavv. 12, 13, 14 illustrano ed integrano quanto espresso al quinto punto (n.d.r.).



Tav. 1

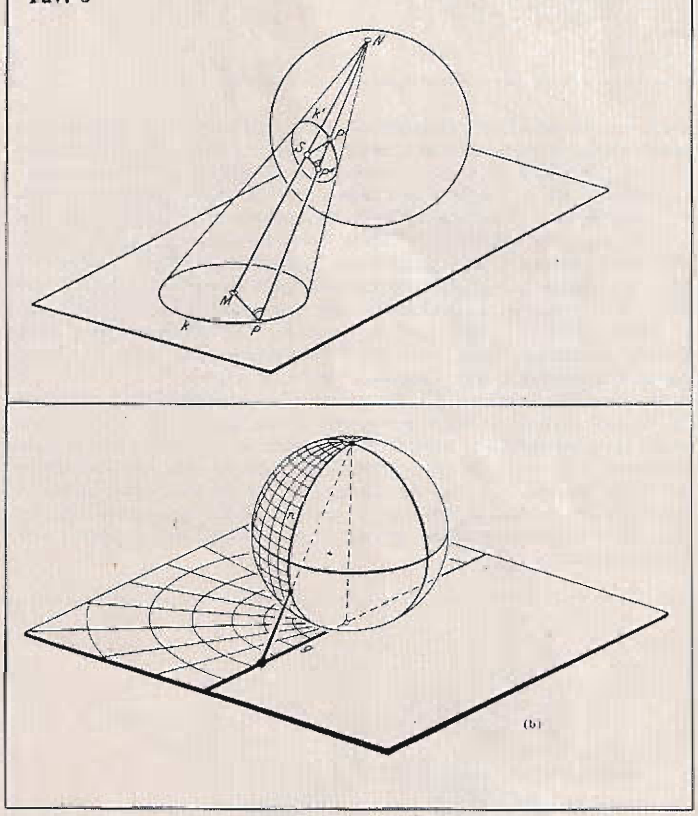
Tav. 2 - La geometria non studia le singole figure, ma piuttosto le classi di equivalenza alle quali appartengono le figure, rispetto ad un certo gruppo di trasformazioni. Pertanto gli oggetti della geometria non sono tutte le proprietà delle figure, ma soltanto quelle che non variano quando le figure vengano trasformate da una qualunque trasformazione del gruppo.
Questa idea era implicitamente soggiacente alla concezione classica della geometria; infatti in questa concezione il trasporto rigido di una figura era considerato come una trasformazione tacitamente ammessa come eseguibile senza restrizioni. È questo l'atteggiamento che si incontra nelle opere dei geometri classici, e che giustifica le costruzioni da loro operate con strumenti elementari (riga e compasso). F. Klein (1849-1925), in una celebre dissertazione del 1972 che viene abitualmente richiamata con la espressione 'Programma di Erlangen', fece un'analisi precisa di questo atteggiamento, e su questa analisi basò la classificazione delle varie geometrie.
In questo ordine di idee la geometria proiettiva costituisce un primo passo verso le nuove concezioni; infatti in proiettiva viene ampliato il gruppo di trasformazioni che si ammette di poter applicare ad una figura geometrica: si passa dai movimenti rigidi e dalle similitudini alle proiezioni. Le proprietà invarianti delle figure per queste trasformazioni sono anzitutto le proprietà che vengono chiamate 'grafiche', cioè quelle che dipendono dalla sola posizione degli elementi di una figura: per esempio l'appartenenza di punti a rette oppure a piani, l'appartenenza di rette a fasci, o di piani a fasci.
Per dare uniformità e generalità ad enunciati ed a dimostrazioni si rende necessario l'ampliamento dello spazio, con la introduzione convenzionale di certi elementi che vengono chiamati 'impropri' o anche 'all'infinito'.
In secondo luogo viene introdotto un numero che risulta invariante per tutte le trasformazioni del gruppo proiettivo: il birapporto di quattro elementi di una forma di prima specie: quattro punti di una retta, quattro rette o quattro piani di un fascio.
Si ottiene così un corpo di dottrina che amplia di molto la visione classica della geometria elementare e contiene questa in sè come caso particolare.

Tav. 2



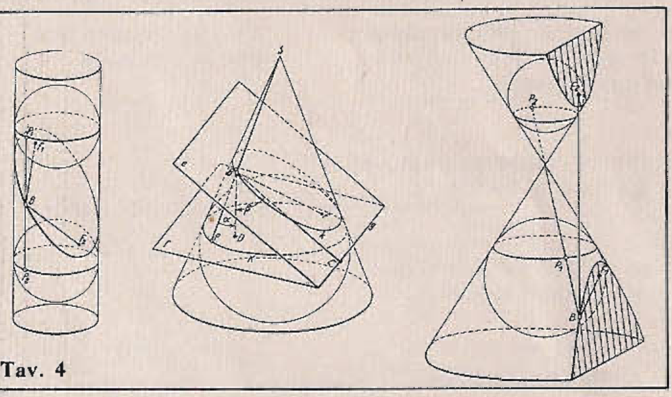
Tav. 3 - La corrispondenza che nasce dalla operazione di proiezione può essere definita anche tra una quadrica ed un piano; nel caso in cui la quadrica sia una sfera si ottiene la proiezione stereografica della sfera stessa, che permette la rappresentazione delle regioni della Terra sul piano con la conservazione degli angoli.

Tav. 3



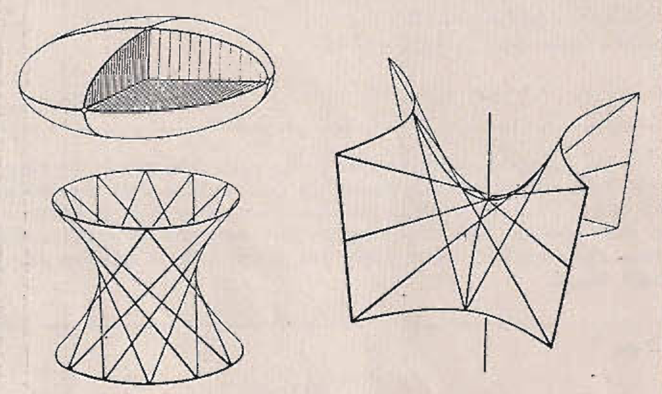
Tav. 4 - Le curve ottenute secando con un piano il cono rotondo erano già state studiate dalla geometria greca, in particolare da Apollonio (III sec. a. C.) in un suo celebre trattato.
La geometria proiettiva amplia la visione classica di queste figure, considerandole come proiezioni della circonferenza.
Da questa nuova visione scaturisce la scoperta di una serie di nuove proprietà, che sono definite mediante la loro caratteristica di essere invarianti per proiezione. La trattazione classica

viene così inquadrata nella nuova impostazione della geometria proiettiva.



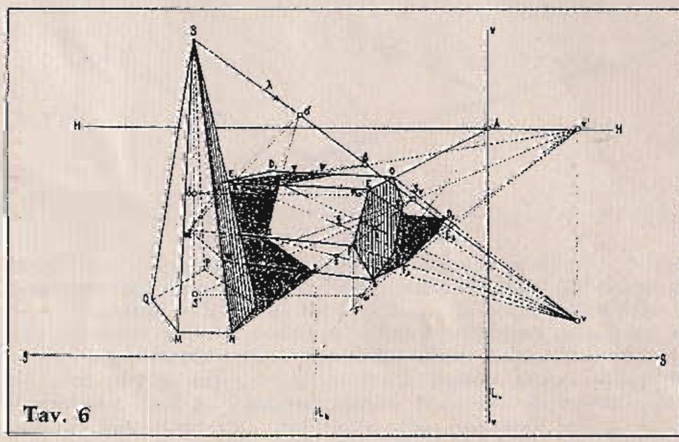
Tav. 4

Tav. 5 - Non soltanto le curve del secondo ordine, ma anche le superfici del secondo ordine, le quadriche, possono essere studiate con i metodi della geometria proiettiva; pertanto questo modo di impostare la ricerca geometrica permette di mettere in evidenza nuove proprietà degli oggetti conosciuti da tempo.

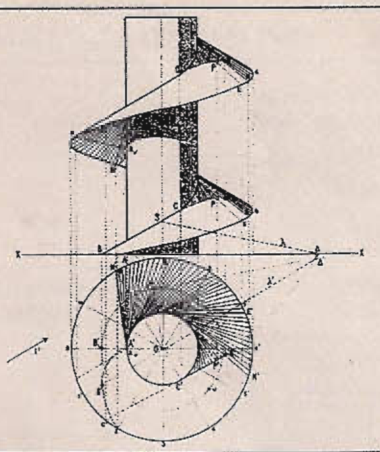


Tav. 5

Tav. 6 - Il problema di rappresentare fedelmente gli oggetti esistenti nello spazio tridimensionale su di un piano o su una qualunque superficie si era già presentato ai pittori del Rinascimento italiano. Ovviamente l'arte può avvalersi di strumenti che fanno appello alla fantasia ed alla percezione del colore; ma anche la rappresentazione artistica deve sottostare a certe regole che sono dettate dalla geometria. Quando si voglia rappresentare sul piano un oggetto tridimensionale occorre tuttavia stabilire un insieme di convenzioni, che permettano la lettura precisa delle proprietà dell'oggetto spaziale. Ciò avviene per esempio in geografia fisica, con le carte geografiche, le quali utilizzano le proiezioni che vengono chiamate quotate.
Agli inizi del secolo XIX la geometria proiettiva rese possibile lo studio metodico delle proprietà delle figure che sono invarianti per proiezione; quindi rese possibile lo studio delle figure stesse attraverso le loro proiezioni; nacque una speciale branca della geometria, che fu chiamata 'geometria descrittiva' e che applicò sistematicamente i metodi della geometria proiettiva alla rappresentazione piana degli oggetti dello spazio tridimensionale.

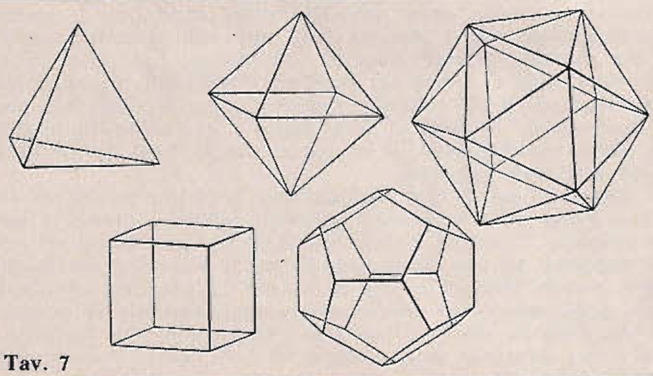


Tav. 6



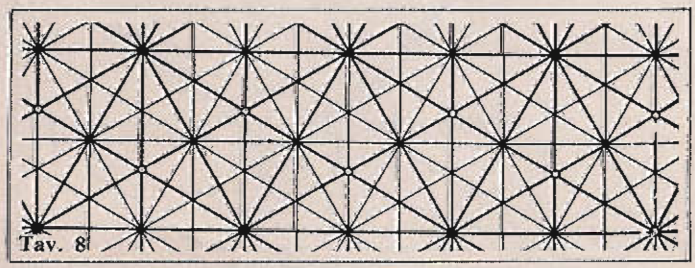
Tav. 6

Tav. 7 - La impostazione che F. Klein diede alla geometria permette di collegare le cosiddette 'regolarità' o 'simmetrie' degli oggetti geometrici a certi gruppi di trasformazioni, che lasciano invariati gli oggetti stessi; per esempio permette di collegare i celebri cinque poliedri platonici a certi gruppi di movimenti rigidi dello spazio in sè, che portano ogni poliedro in se stesso.
Verso la metà del secolo XIX, il genio di E. Galois (1811-1832) aveva collegato la struttura algebrica di gruppo con il problema della risoluzione delle equazioni algebriche. Tale collegamento, in certi casi particolari, venne illustrato da F. Klein con riferimento ai gruppi di movimenti rigidi che portano in sè un poliedro regolare. Celebri sono del Klein le 'Vorlesungen über das Ikosaeder' (lezioni sull'icosaedro) con le quali il geometra tedesco illustra il teorema classico che viene abitualmente richiamato come 'teorema di Ruffini', dal nome del matematico italiano P. Ruffini (1765-1822), che lo intuì e lo dimostrò per primo; tale teorema afferma che è impossibile risolvere l'equazione algebrica generale di grado superiore al quarto con funzioni dei coefficienti che siano espresse mediante radicali. Si chiudeva così una questione secolare, che aveva dato occasione a ricerche fecondissime, e si rendevano più stretti i legami tra l'algebra e la geometria.

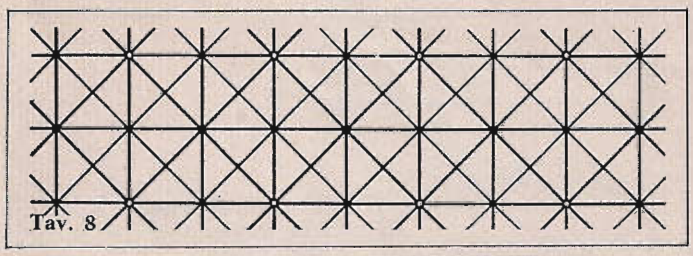


Tav. 7

Tav. 8 - La struttura algebrica di 'gruppo' permette di esprimere in modo preciso e coerente certe proprietà delle figure che vengono spesso indicate con termini come 'regolarità' oppure 'simmetria' ed altri. Questi concetti possono essere applicati a numerosi campi di studio, che a prima vista appaiono distanti e diversi, ma che sono uniti da una profonda analogia formale.
Uno di questi problemi è quello della 'pavimentazione', problema che non è soltanto estetico o pratico, ma che coinvolge anche numerose proprietà globali delle superfici che vengono ricoperte con figure tutte uguali fra loro.
La ricerca delle possibili reti piane costituisce una applicazione delle proprietà dei gruppi di movimenti rigidi, che portano il piano su se stesso.

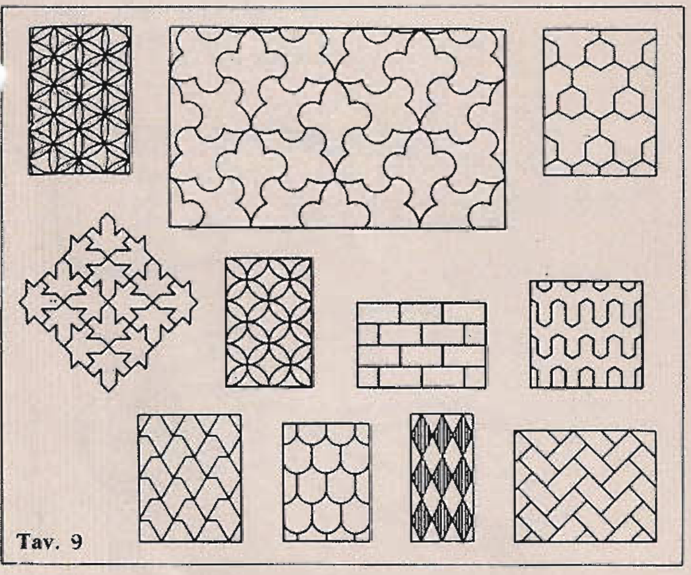


Tav. 8



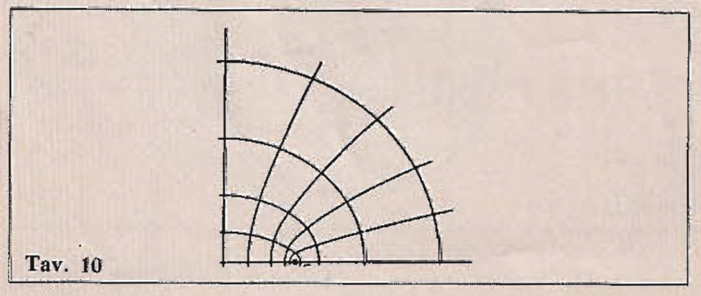
Tav. 8

Tav. 9 - Le pavimentazioni regolari di un piano con figure tutte uguali tra loro hanno una storia molto antica. La teoria dei gruppi permette di classificarle e di collegarle tra loro, riattaccandole da una parte a certe strutture algebriche importantissime (i gruppi appunto) e dall'altra alle proprietà del piano euclideo.
Nello spazio tridimensionale una ricerca analoga permette di classificare le forme di cristalli possibili, mettendo in evidenza i legami profondi tra la geometria e le leggi con le quali la natura costruisce i propri oggetti.

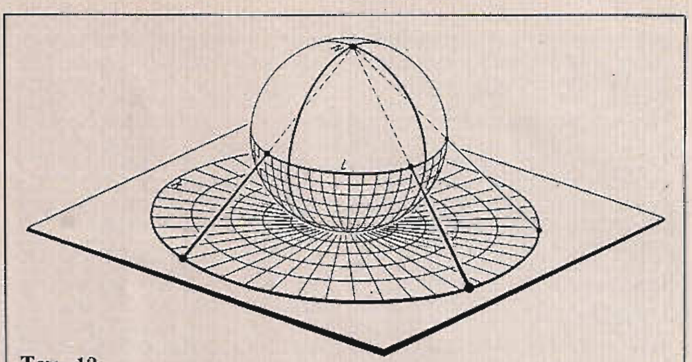


Tav. 9

Tav. 10 - Uno dei punti fondamentali della invenzione della geometria analitica, per opera di R. Descartes (1596-1650) e di P. de Fermat (1601-1665), è il fatto di aver stabilito un insieme di convenzioni che permettono di rappresentare gli enti della geometria con gli enti dell'algebra (numeri, relazioni, equazioni ecc.); in tal modo, per esempio, un punto del piano viene rappresentato da una coppia di numeri (le sue 'coordinate') e l'appartenenza di un punto ad una determinata figura viene tradotta dal fatto che le coordinate del punto soddisfano a certe relazioni.
Ne consegue anche che un problema geometrico viene tradotto in un problema algebrico, o in generale in un problema analitico, e quindi viene risolto con i metodi dell'algebra o addirittura dell'analisi matematica.
Il procedimento era in parte già noto agli antichi, che conoscevano l'impiego delle coordinate astronomiche per determinare la posizione delle stelle e per poter eseguire i calcoli relativi; in modo analogo si può osservare che l'impiego delle coordinate geografiche (longitudine e latitudine) ha permesso di rendere precise le conoscenze di geografia, che prima erano basate su descrizioni verbali.
La nascita della geometria differenziale, verso la fine del secolo XVIII, condusse ad estendere il concetto di 'coordinate' dal piano e dalla sfera ad una superficie qualsivoglia. A K. F. Gauss (1777-1855) si devono i primi passi verso la utilizzazione metodica di questi concetti per lo studio delle proprietà di una superficie qualunque.

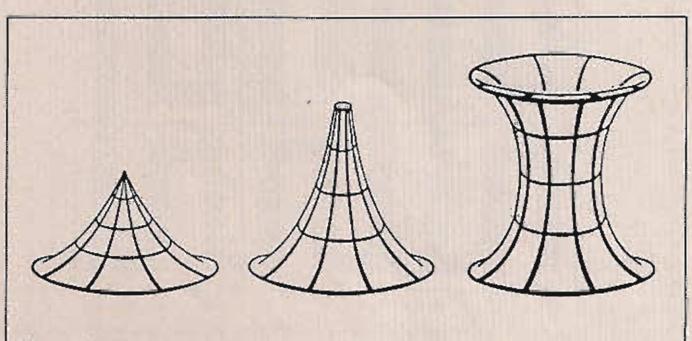


Tav. 10



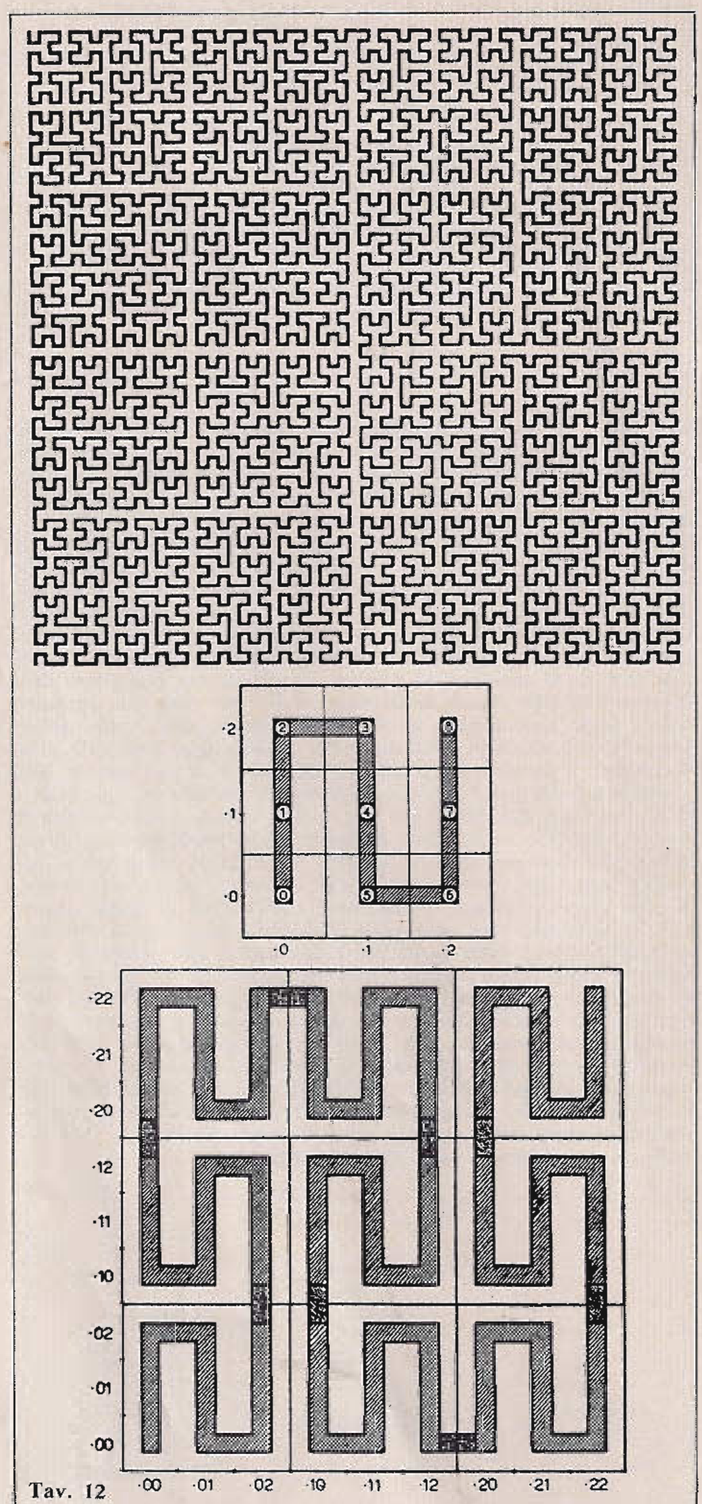
Tav. 10

Tav. 11 - La geometria differenziale, nata a cavallo dei secoli XVII e XIX, è oggi una delle branche più importanti della geometria, tanto per i contenuti teorici che per il fatto di aver fornito gli strumenti concettuali e algoritmici per la formulazione di importanti teorie fisiche, come la Relatività generale.
La esistenza di superfici che non sono applicabili sul piano era già nota da tempo; ma gli strumenti della geometria differenziale hanno permesso di costruire la geometria di queste superfici: si è assodato, per esempio, che su una superficie qualunque esistono delle curve, che vengono dette 'geodetiche' le quali godono di interessantissime proprietà: anzitutto una geodetica fornisce il cammino di minima lunghezza tra due punti della superficie che siano abbastanza vicini tra loro. In secondo luogo, sotto determinate ipotesi di regolarità, due punti abbastanza vicini tra loro sulla superficie determinano una sola geodetica che è la loro congiungente. Si può costruire quindi una 'geometria' su una porzione abbastanza piccola di superficie, che è analoga alla geometria del piano, con la sola restrizione che le rette del piano sono sostituite dalle geodetiche della superficie; si può per esempio parlare di triangoli geodetici, e costruire una trigonometria di questi triangoli. In questo ordine di idee lavorò l'italiano E. Beltrami (1835-1900), il quale osservò che esistono delle particolari superfici, che vengono chiamate 'pseudosfere' sulle quali la trigonometria dei triangoli geodetici è esattamente uguale alla trigonometria del piano della geometria non euclidea iperbolica. Pertanto queste superfici forniscono dei modelli concreti sui quali valgono le relazioni della geometria non euclidea; la esistenza di un modello concreto permette quindi di concludere che questa dottrina non è intrinsecamente contraddittoria e quindi dissipa l'ultimo dubbio che potrebbe sussistere sulla legittimità di queste teorie per rappresentare gli enti dello spazio, le loro mutue relazioni, e per dedurre le conseguenze dalle premesse accettate.

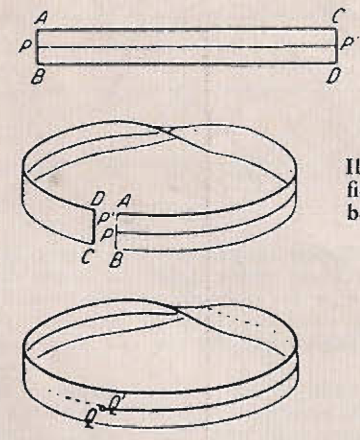


Tav. 11

Tav. 12 - La curva di G. Peano (1858-1932) e l'insieme triadico di G. Cantor (1845-1918) rappresentano forse gli esempi che più colpiscono la immaginazione nel campo dell'analisi del concetto di continuo geometrico. Essi infatti hanno reso evidente quanto vi fosse di indebita estrapolazione della esperienza empirica nella concezione classica, e quindi hanno reso necessaria una precisazione logica rigorosa dei concetti che venivano giudicati 'evidenti'.
In particolare la cosiddetta 'curva di Peano' non è un insieme di punti che rende l'idea dell'oggetto 'curva', come ci viene data dalla esperienza e dal linguaggio comune; pertanto la sua invenzione ha reso evidente il fatto che il luogo dei punti del piano le cui coordinate x, y sono funzioni continue di una variabile reale t può avere delle proprietà che appaiono paradossali a prima vista; per esempio tale luogo può essere costituito da tutti i punti di un quadrato. Le funzioni x ed y sono definite come limiti di successioni di funzioni; la 'curva' viene definita come insieme dei punti limiti di una successione infinita di figure: a pagina seguente sono rappresentate varie figure della successione.

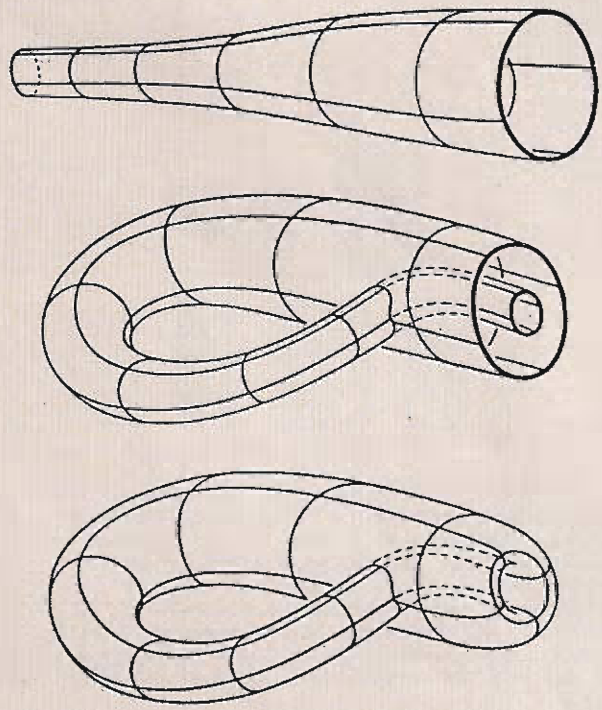


Tav. 12



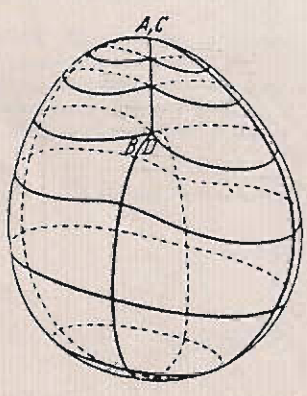
Il ' nastro di Möbius ', superficie unilatera aperta (con bordo).

La costruzione della ' bottiglia di Klein ', superficie unilatera chiusa.



Tav. 13

Tav. 14 - Altra superficie unilatera chiusa. Si tratta della superficie topologicamente equivalente a quella generata dalle circonferenze osculatrici alle sezioni normali piane di una superficie in un suo punto.



Tav. 14

Tav. 13 - L'immagine che noi abitualmente colleghiamo al concetto di superficie, o meglio di porzione limitata di superficie, ci presenta un ente nel quale si possono distinguere nettamente due facce. Tuttavia una analisi più rigorosa permette di concludere che questa nostra immagine non copre tutti i possibili casi in cui il concetto generale di superficie si può realizzare. Il celebre ' nastro di Möbius ', dal nome del matematico tedesco P. Möbius (1790-1868), fornisce un primo esempio di superficie che non ammette la distinzione tra le due facce; per meglio dire, la distinzione è possibile se si isola una piccola porzione della superfiicie attorno ad un punto; ma se si prende in considerazione l'intera superficie, allora risulta possibile andare per continuità da un punto su una faccia a quello che coincide con esso ma sta sulla faccia opposta, senza superare i bordi della superficie.
Questa scoperta ha condotto alla distinzione tra proprietà che vengono chiamate ' locali ' della superficie e le proprietà che vengono dette ' globali '; distinzione che è il punto di partenza per un ramo della topologia.
Un'altra superficie che è ad una sola faccia ma priva di bordi, venne immaginata da F. Klein e porta il nome di ' bottiglia di Klein '.

[A cura di Carlo Felice Manara]