CORSO DI AGGIORNAMENTO IN MATEMATICA

Istituto di Matematica Università

di

MILANO

Gennaio - aprile 1967

Lezioni del prof. Carlo Felice MANARA.

NUMERI CARDINALI FINITI E TRANSFINITI.

1 - Conosciamo il concetto di insieme e conosciamo pure le operazioni fondamentali che si possono eseguire sugli insiemi e le proprietà formali di tali operazioni.

Possiamo osservare che l'aritmetica viene abitualmente presentata - nelle scuole elementari e medie - come strettamente collegata con la teoria degli insiemi, anche se tale teoria non viene esplicitamente presentata e trattata come tale, ma viene piuttosto ritenuta come conosciuta ed acquisita in via semi-sperimentale ed a livello non astratto ma pratico ed operativo.

Si consideri per esempio il concetto di "numero cardinale"; non intendiamo ora trattare questo concetto con pieno rigore; notiamo soltanto che nelle trattazioni abituali si possono leggere frasi di questo tipo: "La risposta alla domanda: quanti sono gli elementi di un insieme A? è un numero". Viene anche data come assolutamente scontata una serie di considerazioni di questo tipo: supponiamo di avere un altro insieme B, e supponiamo nota la nozione di "corrispondenza biunivoca" tra gli elementi dei due insiemi A e B. Non stiamo qui ad analizzare questo concetto; ricordiamo che nelle trattazioni elementari esso viene semplicemente richiamato attraverso esempi ed attraverso esperimenti elementari, lasciando poi all'ascoltatore l'intuire la validità generale del concetto e la sua estensione a casi diversi dagli esempi che sono stati dati.

Una volta acquisito, in via del tutto elementare, il concetto di corrispondenza biunivoca, nelle trattazioni abituali si suole osservare che il numero cardinale degli elementi di un insieme A è uguale a quello degli elementi dell'insieme B allora ed allora soltanto che tra i due insiemi interceda una corrispondenza biunivoca. Il numero cardinale degli elementi di un insieme A è quindi presentato come "quella proprietà comune" che è posseduta dall'insieme A e da <u>tutti</u> gli insiemi che si possono porre in corrispondenza biunivoca con A.

Abitualmente si considera anche come una esperienza fondamentale ed elementare la seguente: considerato un insieme <u>finito</u> A e considerato un suo sottoinsieme proprio A' (cioè un insieme A' tale che ogni elemento di A' è anche elemento di A ma che esiste almeno un elemento di A che non appartiene ad A') il numero degli elementi di A' non può essere uguale a quello degli elementi di A.
In queste proposizioni il concetto di “insieme finito” appare come elementare e direttamente noto. Tuttavia quando si cerchi di presentarlo in modo rigoroso ed incontrovertibile si incontrano notevoli difficoltà. Sta di fatto che tutti gli insiemi di cui abbiamo <u>materialmente</u> esperienza sono finiti; ma abbiamo pure la possibilità di pensare ad un insieme che non ha questa proprietà: tale è l’insieme di tutti i numeri naturali: invero noi sappiamo che se un insieme è finito, allora quando ci mettiamo ad enumerare gli elementi di esso, cioè quando ci mettiamo a "far passare" tutti gli elementi, attribuendo a ciascuno di essi un numero diverso e a due successivi due numeri successivi, arriveremo ad un elemento che sarà l'ultimo nella enumerazione e quindi ad un numero che sarà l'ultimo tra quelli che abbiamo attribuito agli elementi dell'insieme. Ora se pensiamo all'insieme di

tutti i numeri interi, appare contradditorio pensare che possa esistere l'ultimo tra i numeri, perché la esperienza comune ci dice che, dato un qualunque numero intero, è possibile costruirne un altro, diverso da lui e da tutti i precedenti, mediante la addizione di una ulteriore unità.

2 - Le considerazioni che abbiamo svolto fin qui fanno intravedere il fatto che il concetto di "insieme finito", se è preso dalla intuizione comune, è troppo poco preciso per poter essere utilizzato in modo logicamente rigoroso. E d'altra parte già Galileo, con la esposizione di un suo famoso paradosso, metteva a punto la possibilità di definire in modo rigoroso l'insieme infinito, in modo da poter giungere ad una definizione pure rigorosa e soddisfacente di insieme finito. Il paradosso di Galileo a cui accenniamo può essere espresso in termini moderni nel modo seguente: si consideri l'insieme Z di tutti i numeri naturali: $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$, e si consideri l'insieme Z' formato da tutti i numeri naturali ognuno dei quali è quadrato di qualche numero naturale:

$Z' = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots\}$

È del tutto chiaro che l'insieme Z' è un sottoinsieme proprio dell'insieme Z: ogni numero di Z' è anche numero dell'insieme Z ma non è vero il viceversa. La domanda che viene spontanea a chi consideri i due insiemi è questa: gli elementi dell'insieme Z sono "di più" oppure sono altrettanto numerosi di quelli dell'insieme Z' ?

La risposta che si è tentati subito di dare, sulla scorta delle esperienze che si fanno a proposito degli insiemi finiti, è che gli elementi dell'insieme Z sono "di più" ovvero "più numerosi" di quelli dell'insieme Z'. Invece, osserva Galileo, è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dell'insieme Z e quelli dell'insieme Z'; in altre parole è possibile stabilire una corrispondenza del tipo di quella che - se intercedesse tra insiemi finiti - porterebbe a dire che gli insiemi hanno lo stesso numero di elementi.

In questo caso si ottiene una conseguenza "paradossale" perché si ottiene - estendendo la validità dei concetti che valgono nel finito al caso generale - che il "tutto" (cioè l'insieme Z) è "uguale" alla parte (cioè all'insieme Z'). Ecco le parole che Galileo mette in bocca al suo personaggio Salviati:

"*Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gli infiniti, dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che sia inconveniente, perché stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed egualità non convenghino a gli infiniti dei quali non si può dire uno essere maggiore o minore o uguale all'altro. Per prova di che…*" e qui espone il procedimento che porta a constatare il fatto che esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme di tutti i numeri interi e l'insieme dei numeri interi che sono quadrati. E conclude poi: "…*Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, gli* *attributi di uguale, maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate".*

Come si vede, Galileo risolve il paradosso secondo una linea di pensiero che è accettata anche oggi, cioè semplicemente limitando il significato del concetto reso dalle parole "maggiore" oppure "minore", oppure "uguale". Se esse sono applicate agli insiemi finiti, allora abbiamo le proprietà evidenti che sono espresse dalla frase: “Il tutto è maggiore della parte”. Se esse sono applicate ad insiemi infiniti, si ottiene un insieme di nuove regole di grammatica per poter applicare tali concetti. In particolare il paradosso di Galileo mostra che per insiemi infiniti è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme ed un suo sottoinsieme proprio.

Si trae da queste considerazioni anche un'altra conseguenza che ha grandissima importanza logica: abbiamo visto infatti che la nozione di "insieme finito" appare abbastanza vaga in origine, e difficilmente precisabile, perché fa essenzialmente ricorso ed appello alla nostra esperienza che è necessariamente limitata. Orbene le considerazioni svolte mostrano che è possibile seguire un cammino logico diverso da quello che appare come naturale a prima vista: invero si potrebbe pensare di presentare prima gli insiemi finiti e poi, attraverso la negazione della nozione di finitezza, gli insiemi infiniti.

E la definizione di insieme infinito può essere ottenuta attraverso la possibilità di stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di un insieme cosiffatto e quelli di un suo sottoinsieme proprio; si ottengono allora gli insiemi finiti come casi particolari, come quelli cioè per i quali una corrispondenza cosiffatta non si può stabilire.

Notiamo che il seguire questa strada, che appare a prima vista complicata e difficile, suppone l'uso soltanto delle nozioni logiche di insieme, sottoinsieme proprio, corrispondenza biunivoca. Inoltre così facendo non si fa appello a quelle nozioni di sapere antropomorfico che sostanzialmente si basano sulla operazione di "enumerazione" degli elementi di un insieme, operazione che dovrebbe avere un "termine" se viene applicata agli elementi di un insieme finito e non dovrebbe avere alcun termine se applicata agli elementi di un insieme infinito.

Oltre a ciò che abbiamo visto fin qui, faremo vedere in seguito che è possibile stabilire una specie di gerarchia tra i "cardinali transfiniti", cioè è possibile dimostrare, come vedremo, che dato un insieme infinito A è possibile dimostrare la esistenza di un altro insieme, pure infinito, B tale che A è in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme proprio di B, ma B non può essere posto in corrispondenza biunivoca con A.

Rimane tuttavia sempre valido l'argomento di Galileo, cioè la osservazione che la applicazione delle relazioni solite, di maggioranza, uguaglianza o minoranza, che siamo abituati ad applicare tra insiemi finiti, non può essere estesa senza precauzioni agli insiemi infiniti. Con questa osservazione vengono eliminati molti paradossi e vengono rese vane molte discussioni che hanno aspetto pseudofilosofico e che nascono soltanto dal non avere precisato i termini delle questioni.

3 - Abbiamo visto che è possibile applicare la nozione di "corrispondenza biunivoca" tra elementi di due insiemi infiniti; pertanto - sulla scorta delle idee di G. Cantor - è possibile stabilire anche una nozione di fondamentale importanza che estende agli insiemi infiniti la nozione di numero cardinale. Invero abbiamo visto che se due insiemi finiti sono tali che tra i loro elementi è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca, allora i due insiemi hanno lo stesso numero di elementi; esiste cioè una "proprietà" comune ai due insiemi, proprietà che è quella di avere lo stesso numero di elementi.

G. Cantor ebbe l'idea di estendere questa nozione anche agli insiemi infiniti; egli introdusse il concetto di "potenza" di un insieme; seguendo le sue idee, si suol dire che due insiemi qualunque A e B "hanno la stessa potenza" se è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di A e gli elementi di B. Se i due insiemi A e B sono finiti, allora l'avere la stessa potenza coincide con la proprietà di avere lo stesso numero di elementi; se i due insiemi sono infiniti, la proprietà di avere la stessa potenza stabilisce tra i due insiemi una relazione effettiva: vedremo infatti come abbiamo già detto che esistono coppie di insiemi infiniti tali che certamente non hanno la stessa potenza ed invece esistono coppie di insiemi infiniti che hanno la medesima potenza.

Otterremo così una successione di concetti, che possono essere messi in ordine così come si possono mettere in ordine i numeri interi naturali, e che si chiamano secondo la denominazione abituale "numeri transfiniti". Si può anche stabilire una "aritmetica" dei numeri transfiniti, che ha qualche legge paradossale, se giudicata dal punto di vista della aritmetica abituale, ma che permette di dedurre e di stabilire le proprietà degli insiemi infiniti e delle operazioni su di essi, così come la aritmetica dei numeri naturali permette di stabilire le proprietà degli insiemi finiti e delle operazioni su di essi.

Sappiamo per esempio che quando si abbia a che fare con due insiemi finiti A e B, che non hanno elementi comuni, e si indichino rispettivamente con a e b i numeri degli elementi di A e B, alla operazione di unione tra i due insiemi, che dà luogo all'insieme $A \cup B$, corrisponde la operazione di "somma" tra i due numeri a e b che dà luogo al numero cardinale $a + b$.

Orbene le stesse leggi non valgono tra i numeri transfiniti che corrispondono agli insiemi infiniti. Tuttavia come vedremo è possibile dare qualche legge aritmetica anche per i numeri transfiniti. I numeri cardinali transfiniti, che corrispondono alle potenze degli insiemi infiniti, vengono indicati simbolicamente con la prima lettera, aleph, dell'alfabeto ebraico: $\aleph$.

In particolare il numero cardinale transfinito, che corrisponde all'insieme di tutti i numeri naturali (e ad ogni insieme che può essere posto in corrispondenza biunivoca con esso, per esempio. ad ogni successione infinita) viene indicato con il simbolo che viene letto "aleph zero": $\aleph_0$.

4 - Prima di riportare la classica dimostrazione di Cantor che riguarda la esistenza di numeri cardinali transfiniti di insiemi che non possono essere posti in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali, riportiamo qui un'altra dimostrazione, pure di Cantor, che riguarda un altro insieme di numeri ben noti elementarmente: l'insieme dei numeri razionali. Il teorema di Cantor che abbiamo in vista mira a dimostrare che questo insieme ha la stessa potenza dell'insieme dei numeri interi: poiché ogni insieme che abbia tale potenza viene anche detto "insieme numerabile", il teorema di Cantor può essere enunciato dicendo che “l'insieme dei numeri razionali è numerabile".

Per dare la dimostrazione di questo teorema, consideriamo per il momento soltanto i razionali positivi. Ogni numero cosiffatto può essere rappresentato mediante (almeno) una frazione del tipo

(1) m/n (m, n interi);

anzi, se conveniamo di scegliere come frazione che rappresenta il numero razionale proprio quella in cui i due interi m ed n che danno il numeratore e rispettivamente il denominatore sono primi tra loro, cioè, se – secondo la nomenclatura ordinaria abituale - riduciamo la frazione ai minimi termini, vi è una corrispondenza biunivoca tra i numeri razionali (positivi) e le frazioni del tipo (1), aventi come numeratore e come denominatore due numeri interi positivi primi tra loro.

Possiamo ora costruire una tabella a doppia entrata, infinita in due sensi e precisamente avente infinite righe ed infinite colonne, assumendo le righe in corrispondenza dei denominatori e le colonne in corrispondenza dei numeratori. Tale tabella viene ad assumere la forma seguente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	….
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	….
2	1/2		3/2		5/2		7/2		9/2		11/2		13/2		….
3	1/3	2/3		4/3	5/3		7/3	8/3		10/3	11/3		13/3	14/3	….
4	1/4		3/4		5/4		7/4		9/4		11/4		13/4		….
5	1/5	2/5	3/5	4/5		6/5	7/5	8/5	9/5		11/5	12/5	13/5	14/5	….
6	1/6				5/6		7/6				11/6		13/6		….
7	1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7		8/7	9/7	10/7	11/7	12/7	13/7		….
8	1/8		3/8		5/8		7/8		9/8		11/8		13/8		….
9	1/9	2/9		4/9	5/9		7/9	8/9		10/9	11/9		13/9	14/9	….
10	1/10		3/10				7/10		9/10		11/10		13/10		….
11	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11		12/11	13/11	14/11	….
12	1/12				5/12		7/12				11/11				….
13	1/1	2/13	3/13	4/13	5/13	6/13	7/13	8/13	9/13	10/13	11/13	12/13		14/13	….
14	…	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….
….	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….	….

Osserviamo che all'incrocio di ogni riga con ogni colonna della tabella trova posto il numero razionale che possiede come numeratore l'intero che corrisponde alla colonna e come denominatore l'intero che corrisponde alla riga. È chiaro che non tutte le caselle corrispondenti agli incroci saranno riempite, perché ogni numero razionale può essere rappresentato in infiniti modi con frazioni equivalenti, e noi abbiamo stabilito di scegliere come rappresentante di un razionale soltanto la frazione che è ridotta ai minimi termini. Enumeriamo ora tutti i numeri razionali della tabella che abbiamo costruita con procedimento che consiste nel "farli passare" uno dopo l'altro procedendo in diagonale, con senso discendente dall'alto a destra in basso a sinistra. Pertanto avremo la successione seguente:

(2) *2, 1/2, 3, 1/3, 4, 3/2, 2/3, 1/4, 5, 1/5, 6, 5/2, 4/3, 3/4, 2/5, 1/6, 7, 5/3, 3/5, 1/7, 8, 7/2, 5/4, 4/5, 2/7, 1/8, 9, 7/3, 3/7, 1/9,…*

Possiamo notare che in questa successione compaiono dei numeri razionali rappresentati da frazioni

nelle quali la somma del numeratore e del denominatore va sempre crescendo; e viceversa, dato un qualunque numero razionale, rappresentato da una frazione *m/n* ridotta ai minimi termini, essa troverà un suo posto nei numeri della successione, e precisamente tra quelli che hanno la somma del numeratore e del denominatore uguale a $m + n$. È chiaro pertanto che ogni numero razionale troverà posto nella tabella e quindi nella successione che si costruisce a partire dalla tabella. Quindi tutti i numeri razionali positivi possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i numeri interi, perché possono essere ordinati in una successione la quale possiede la proprietà fondamentale di non escludere alcun numero cosiffatto. Osserviamo ora che il procedimento seguito per costruire una successione che comprenda tutti i numeri razionali positivi può essere adottato per costruire una successione analoga che comprende tutti i numeri razionali, positivi e negativi. Invero basta costruire due successioni cosiffatte, mettendo in una di esse lo zero al primo posto e poi tutti i numeri razionali positivi, nell'altra tutti i numeri razionali negativi; e poi costruire una terza successione che comprende tutti i numeri della prima successione, nell'ordine che hanno nella stessa, nei posti dispari (primo, terzo, quinto ecc.) e tutti i numeri razionali negativi, nell'ordine che hanno nella seconda successione, nei posti pari (secondo, quarto, sesto, ecc.).
Con metodo analogo si dimostra il risultato lievemente più generale: “Dato un insieme numerabile, i cui elementi sono insiemi a loro volta numerabili, può essere costruito un insieme pure numerabile che contiene tutti gli elementi degli insiemi". Invero se supponiamo che gli insiemi siano

(3) $A_1 \ , \ A_2 \ , \ A_3 \ , \ldots$

essi possono essere posti in una successione, perché per ipotesi formano un insieme numerabile; inoltre gli elementi di ognuno degli insiemi (3) possono essere posti in una successione ancora per ipotesi. Allora si può anche questa volta costruire una tabella a doppia entrata del tipo di quella che abbiamo costruito per i numeri razionali, nella quale trovano posto tutti gli elementi di tutti gli insiemi (3), e poi possiamo procedere ad enumerare gli elementi di tutti gli insiemi stessi con il procedimento diagonale di Cantor.
È immediato osservare che il risultato a cui siamo pervenuti ha qualche aspetto paradossale: invero se si immagina, secondo la concezione abituale, che i numeri siano le ascisse dei punti di una retta *r* sulla quale è stato stabilito un sistema di coordinate (mediante la scelta di una origine, di una unità di misura e di un verso positivo), è chiaro dalla immagine geometrica che i punti aventi come ascissa un numero intero formano un insieme tale che la distanza di due qualunque di essi tra loro è almeno pari alla unità di misura (oppure a un suo multiplo) mentre i punti che hanno come coordinate numeri razionali formano un insieme che è "dovunque denso" sulla retta.

Invero tra due punti A e B cosiffatti, che hanno come coordinate due numeri razionali *a* e *b*, esiste sempre almeno un terzo punto C che ha pure una coordinata razionale $c = (a + b) / 2$, e che sta fra i due punti precedenti, perché come è noto, supposto che si abbia per esempio a < b, si ha pure

$$a < (a + b) / 2 < b.$$

È pure vero che, per n intero positivo qualunque, purché maggiore di 1, si ha

$$a < (a + b) / n < b,$$

e quindi che tra due punti della retta che hanno coordinate razionali stanno infiniti punti che hanno pure coordinate razionali.

Questa visione geometrica può far pensare in un primo tempo che i numeri razionali siano molti "di più" dei numeri interi, perché la nostra immaginazione geometrica, con le convenzioni poste, "crede di vedere" molti più punti che corrispondono ai primi di quanti non corrispondano ai secondi. Tuttavia tale "intuizione", che risulta soltanto a prima vista plausibile, appare falsa ad una ulteriore analisi, purché si precisi in modo rigoroso ciò che si intende significare dicendo che gli elementi di un insieme infinito A sono "di più" degli elementi di un altro insieme infinito B.

Invero l'apparente paradosso, che può condurre a paralogismi se si vuol fondare su di esso un ragionamento, è dovuto semplicemente al fatto che vogliamo far dire alla "intuizione" geometrica molto di più di quanto essa non sia in grado di dire; precisamente vogliamo estrapolare la nostra esperienza materiale - limitata agli insiemi finiti - agli insiemi infiniti.

Va detto che molti presunti "paradossi" di tipo analogo sono dovuti molto spesso a "intuizioni" mal fondate o fondate soltanto su esperienze finite, le quali sono estese poi a campi che esulano dalla loro portata.

5 - Il risultato fondamentale che abbiamo in vista a proposito degli insiemi infiniti riguarda l'insieme dei numeri reali. Per comodità limiteremo qui le nostre considerazioni ai numeri reali x che soddisfano alla relazione

$$(1) \qquad 0 < x < 1,$$

numeri che, secondo la immagine geometrica che abbiamo sopra richiamata, possono essere interpretati anche come ascisse di punti che, sulla retta, stanno tra i punti origine delle coordinate ed il punto unità, e quindi appartengono ad un segmento di lunghezza unitaria. Il risultato che riguarda questi punti può essere espresso in forma suggestiva dicendo che i punti del segmento sono "più numerosi" dei numeri interi, cioè formano un insieme infinito che ha una potenza tale da non poter essere posto in corrispondenza biunivoca con un insieme numerabile.

La dimostrazione, pure dovuta a Cantor, è condotta per assurdo e procede nel modo seguente. Si fissi un sistema di numerazione, per esempio l'abituale sistema decimale. Allora un numero reale x che soddisfa alle limitazioni (1) può essere rappresentato nella abituale forma decimale come segue:

$$(2) \qquad 0, a_1 \, a_2 \, a_3 \, a_4 \, a_5 \, a_6 \, \ldots ,$$

ove a_1, a_2, a_3,…. sono le cifre della rappresentazione decimale del numero reale x e quindi sono scelte tra le cifre che servono per la numerazione decimale: *0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.*

Supponiamo ora che i numeri del tipo (2) formino un insieme numerabile; ciò significa che essi possono essere posti in una successione che li comprende tutti, senza escluderne alcuno. Sia

(3) $X_1, X_2, X_3, X_4 \ldots..$

tale successione, essendo ognuno dei numeri (3) rappresentato nella forma (2), con cifre opportune. Consideriamo quindi le cifre che danno le rappresentazioni decimali nella forma (2) dei numeri della successione (3). Con tali cifre potremo costruire ancora una volta una tabella a doppia entrata, dotata di infinite righe e di infinite colonne:

$$
\begin{array}{ll}
(4) & a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14}\, a_{15}\, a_{16}\, a_{17}\, a_{18}\, a_{19} \ldots\ldots \\
 & a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24}\, a_{25}\, a_{26}\, a_{27}\, a_{28}\, a_{29} \ldots.. \\
 & a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34}\, a_{35}\, a_{36}\, a_{37}\, a_{38}\, a_{39} \ldots\ldots. \\
 & a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\, a_{44}\, a_{45}\, a_{46}\, a_{47}\, a_{48}\, a_{49} \ldots\ldots \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Abbiamo distinto ogni cifra che entra nella tabella (4) con un doppio indice: il primo si riferisce al numero cui la cifra appartiene, il secondo si riferisce al posto che la cifra stessa ha nella rappresentazione decimale del numero suddetto. Così per esempio la cifra indicata con a_{45} è la quinta cifra della rappresentazione decimale del numero x_4.

Ora si dimostra abbastanza facilmente che è possibile definire un numero che soddisfa alle limitazioni (1) e che certamente <u>non</u> appartiene alla successione (3); il che vale quanto dire che non è vera la ipotesi dalla quale siamo partiti, che cioè la successione (3) contenga tutti i numeri che soddisfano alle (1), senza escluderne alcuno. Il numero *y* di cui parliamo si potrà rappresentare nella forma

(5) y = 0, $b_1\; b_2\; b_3\; b_4\; b_5\; \ldots\ldots$,

dove $b_1\; b_2\; b_3\; b_4\; b_5\; \ldots.$ sono delle cifre della numerazione decimale che devono soddisfare soltanto alla condizione seguente: ogni cifra b_k deve essere diversa dalla *k*-esima del numero *k*-esimo.

Pertanto il numero (5) nel quale le cifre b_1, b_2, b_3,… soddisfano a questa condizione non è certamente incluso nella tabella (4), perché certo la rappresentazione decimale di *y* differisce almeno per una cifra da ogni numero della successione (3); invero per il modo come abbiamo definito *y*, certo questo numero ha la prima cifra che differisce dalla prima cifra della rappresentazione decimale di x_1, ha la seconda cifra che differisce dalla seconda cifra della rappresentazione decimale di x_2 e pertanto differisce da x_2, differisce da x_3, e così via.

6 - La dimostrazione che abbiamo riportata sopra è di estrema importanza, perché è il primo passo sulla strada che conduce a stabilire una specie di "gerarchia" tra gli infiniti. Invero questa dimostrazione permette di affermare che vi è l'infinito dell'insieme numerabile, vi è l'infinito dell'insieme dei punti di un segmento (che viene anche chiamato "potenza del continuo") e che della

potenza del continuo si può dire che è "maggiore" della potenza del numerabile; si suole indicare tale potenza del continuo con il simbolo "c".
La dimostrazione di Cantor, che abbiamo riportata poco fa, può essere generalizzata: invero considerato un insieme infinito A e considerato l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A, insieme che si suole indicare con $\mathcal{P}(A)$ (insieme delle parti di A), si dimostra con un procedimento analogo a quello seguito poco fa, che l'insieme $\mathcal{P}(A)$ ha certamente una potenza che è superiore a quella di A, nel senso che è possibile definire una corrispondenza biunivoca tra A e un sottoinsieme di $\mathcal{P}(A)$ ma non esiste alcuna corrispondenza biunivoca tra A e $\mathcal{P}(A)$. Questo teorema più generale dà in particolare il teorema di Cantor che abbiamo dimostrato sopra; basta infatti pensare che ogni numero compreso tra 0 ed 1 si può rappresentare con una successione infinita o finita di cifre; pertanto l'insieme dei numeri reali suddetti è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti dell'insieme numerabile A.

7 - In base a ciò che è stato detto fin qui si conclude che è possibile stabilire una successione dei transfiniti cardinali; in questa successione il primo elemento è il numero transfinito "aleph zero" che corrisponde alla potenza dell'insieme numerabile; non si sa ancora se la potenza del continuo, che abbiamo indicata con c, sia il numero cardinale immediatamente successivo ad "aleph zero" [*Ipotesi del continuo, N.d.R.*] oppure se esista qualche transfinito che è superiore ad aleph zero ed inferiore a c, nel senso che abbiamo precisato. La risposta a questa domanda interessa certe questioni di logica che vogliamo toccare qui brevemente.
A tale fine ritorniamo alla dimostrazione della non numerabilità del continuo. Abbiamo allora dimostrato che se si suppone che esista una successione contenente tutti i numeri reali compresi tra zero ed uno, questa affermazione risulta essere contraddittoria, perché si dimostra che esiste un numero reale che non appartiene alla successione. Tuttavia la dimostrazione che abbiamo dato di questa affermazione potrebbe essere esposta nei seguenti termini. Il numero y che consideriamo può essere costruito come segue: si scelga ad arbitrio la prima cifra dopo la virgola dell'allineamento decimale che definisce y, purché sia diversa dalla cifra a_{11} che è la prima cifra dell'allineamento decimale che rappresenta x_1; si scelga poi ad arbitrio la seconda cifra dell'allineamento di y in modo qualunque, purché diversa dalla seconda cifra decimale a_{22} dell'allineamento che rappresenta x_2, e così via.
Queste affermazioni potrebbero far pensare che abbia senso un metodo di dimostrazione della esistenza del numero y che consiste nel "costruire" effettivamente il numero y mediante una successione di infinite scelte arbitrarie. Ora questa affermazione, ed ogni altra che si basi sulla supposta possibilità di concludere un ragionamento basato sulla ammessa possibilità di eseguire infinite scelte arbitrarie, è stata contestata per la prima volta da G. Peano ed ha formato oggetto di

lunghi studi. Sostanzialmente la questione si può ricondurre in questi termini: è dato un insieme *I*, i cui elementi sono insiemi a loro volta. Indichiamo con *A* un elemento qualunque di *I*; si domanda se è possibile pensare ad un insieme i cui elementi siano tali che ognuno di essi appartiene ad uno ed un solo insieme che è elemento di *I*. Oppure, in altre parole, se è possibile pensare ad una funzione (che viene chiamata "funzione di scelta", indicata con il simbolo φ): tale funzione sia $\varphi\ (A) = a$, con la condizione $a \in A$, per ogni $A \in I$.

La questione sostanzialmente si riconduce ad un'altra che riguarda la logica e la teoria degli insiemi; in quest'ultima si danno delle regole per costruire un insieme a partire da certi altri; pertanto il problema della esistenza o meno di una funzione di scelta può essere ricondotto al problema se tra le leggi che permettono di costruire un insieme a partire da altri ci sia anche la funzione di scelta, quando gli altri insiemi siano gli elementi di un insieme qualunque *I*. La affermazione della esistenza di una funzione di scelta viene chiamata abitualmente "*Postulato di Zermelo*", ovvero anche "*Principio di "Zermelo*". Questo si riduce sostanzialmente, secondo la concezione moderna, ad una delle tante regole che delimitano il concetto di insieme. Invero tale principio di Zermelo si trova enunciato nella successione di postulati con la quale questo matematico volle dare una assiomatizzazione del concetto di insieme.

Nota della redazione. Maggio 2013

Nel reimpaginare la grafica del vecchio quaderno nel maggio 2013, si è pensato di aggiungere la seguente appendice contenente note sull'introduzione del campo reale secondo le idee di G. Peano, redatte da Carlo Felice Manara come appunti personali nel 1998. L'introduzione "*alla Peano*" era molto cara a CFM, che la considerava didatticamente significativa e abbastanza semplice. Si trova sviluppata in: P. Canetta - C. F. Manara. *Complementi di algebra ed elementi di trigonometria ad uso degli studenti dei corsi propedeutici delle facoltà universitarie.* La Goliardica, Milano, 1959.

APPENDICE

1 - È noto che il concetto di numero reale viene abitualmente presentato secondo varie teorie: la teoria che fa capo alle idee di Dedekind [sezioni nel campo razionale]; la teoria che fa capo alle idee di Cantor [coppie di successioni convergenti di numeri razionali]; nei corsi universitari viene anche spesso presentata la teoria delle "successioni di Cauchy" di numeri razionali; questa potrebbe essere considerata come una variante della teoria di Cantor.

Richiameremo qui per sommi capi una trattazione dei numeri reali che si ispira a quella data da G. Peano nel "Formulario Mathematico"; si potrebbe dire che tale trattazione si fonda sulle idee di Dedekind, cogliendone gli aspetti essenziali e praticando sostanziali semplificazioni, che facilitano l'applicazione pratica dei concetti sviluppati.

2 - Supponiamo di conoscere il campo Q dei numeri razionali: operazioni, relazioni, loro proprietà formali e quant'altro.

Avvertenza - Nel seguito quando parleremo di "numeri razionali" intenderemo parlare di numeri razionali assoluti; o, se si vuole, appartenenti al sottoinsieme di Q costituito dai numeri x per cui valga, per ogni x:

$$(1)\ x \geq 0.$$

È chiaro che tali numeri non costituiscono un campo, perché l'insieme ha la struttura di semigruppo [e non di gruppo] rispetto all'operazione di addizione. Indicheremo il sottoinsieme in parola col simbolo Q^{+}; pertanto costruiremo qui l'insieme dei numeri reali x che soddisfano alla relazione (1); tale insieme potrebbe essere indicato con R^{+}; a partire da questo si costruisce facilmente il campo reale R.

3 - Definizione. Sia A una classe non vuota di numeri razionali. Diremo che:

I) A è *superiormente limitata* se esiste almeno un razionale q che è maggiore di ogni elemento di A;

II) A è *completa* quando, se un razionale a appartiene alla classe A, ad essa appartiene anche ogni razionale minore di a.

NOTA - Qui e nel seguito il termine "*classe*" viene usato come sinonimo di "*insieme*"; nel seguito useremo l'abbreviazione "CSL" per indicare: "*completa e superiormente limitata*".

OSS.1 - Indicheremo col simbolo "*0*" (zero) la classe CSL costituita dall'unico elemento 0. Si constata che ogni altra classe CSL è costituita da infiniti elementi: infatti, se essa contiene un numero razionale a, contiene anche tutti gli infiniti razionali non negativi minori di a.

OSS.2 - Una classe CSL può essere costruita fissando un razionale a ed attribuendo alla classe ogni razionale x tale che sia $x < a$.

4 - Definizione. Data una classe A, che sia CSL, diremo che un razionale a è l'*estremo superiore* di A se avviene che:

I) a è non inferiore ad ogni elemento di A;

II) dato un qualunque razionale b positivo, $b < a$, esiste in A almeno un elemento $x > b$.

Teorema 1 - Esistono classi di razionali CSL tali che nessun razionale può essere loro estremo superiore.

Infatti, tale si dimostra essere la classe dei razionali x che soddisfano alla condizione:

$$(2)\ x^2 < 3.$$

La dimostrazione può essere svolta mostrando che non esiste alcun razionale soddisfacente l'equazione $x^2 = 3$; è questa una dimostrazione classica e ben nota, analoga a quella che si svolge per dimostrare che il lato e la diagonale di un medesimo quadrato sono incommensurabili tra loro.

Inoltre si verifica che, dato un qualunque razionale a tale che sia $a^2 < 3$, il razionale b, definito da:

$$b = 6a/(3 + a^2),$$

soddisfa alle relazioni: $a < b$; $b^2 < 3$.

Pertanto non esiste alcun numero razionale, che soddisfi alla definizione di estremo superiore della classe dei numeri x con la proprietà (2).

OSS.3 - Sussiste una naturale bijezione (*corrispondenza biunivoca*) tra l'insieme dei numeri di Q^+ e l'insieme delle classi CSL che ammettono estremo superiore (razionale). Pertanto ogni classe di quest'insieme può essere costruita con la modalità esposta nell'Oss.2.

OSS.4 - Qualora una classe A ammetta estremo superiore, cioè possa essere determinata con la modalità utilizzata nell'Oss.2 per costruirla, è possibile costruire una nuova classe CSL, che indicheremo con A_0, la quale è costituita da tutti i razionali x che soddisfano alla relazione:

$$(3)\ x \leq a.$$

Si suol dire che questa seconda classe è costruita "*aggregando*" alla A il suo estremo superiore a. In questo caso tale numero è il massimo numero della classe A_0, e si dirà convenzionalmente che tale classe CSL è *chiusa*; e, pure convenzionalmente, si dirà che una classe CSL è *aperta*, tanto nel caso in cui non esista alcun razionale che possa essere suo estremo superiore, quanto nel caso in cui tale estremo esista, ma non sia considerato come appartenente alla classe.

Avvertenza - In tutto il seguito, quando occorrerà nominare una classe A di numeri razionali, CSL, si intenderà che tale classe è considerata aperta, salvo esplicito avviso contrario, che verrà dato di volta in volta.

5 - Definizione. Data una classe CSL di numeri razionali, sia A, indicheremo con A' la *classe complementare* di A rispetto all'insieme Q^+.

OSS. 5 - La classe A' non è vuota, per definizione. Inoltre se un razionale b appartiene ad A', ad essa appartiene anche ogni razionale maggiore di b.

6 - Definizione. Date due classi CSL, A e B, si chiamerà *somma* delle due, e si indicherà con il simbolo:

$$(4)\ A + B$$

la classe CSL costituita dalle somme di ogni coppia di numeri, ciascuna costituita da un numero di A ed uno di B, e completata con ogni razionale che sia minore di una somma cosiffatta.

OSS.6 - Si dimostra senza difficoltà che l'operazione di somma tra classi CSL ora definita gode delle classiche proprietà commutativa ed associativa di cui gode la omonima operazione tra numeri. Si osserva pure che la classe CSL costituita dal solo elemento "0" [zero] [Cfr. Oss.1] è l'elemento neutro per tale operazione. Si constata infine che, se l'operazione di somma è eseguita su due classi che hanno estremo superiore, si ottiene ancora una classe che ha estremo superiore, il quale è la somma [nel senso che questo termine ha per i numeri razionali] degli estremi superiori delle classi su cui si è operato.

Definizione. Date due classi CSL, A e B, si chiamerà *prodotto* delle due, e si indicherà con il simbolo:

$$(5)\ A * B$$

la classe CSL costituita da tutti i prodotti di coppie di numeri, ognuna costituita da un numero di A ed uno di B, completata con ogni razionale che sia minore di un prodotto cosiffatto.

OSS.7 - Si dimostra senza difficoltà che l'operazione di prodotto tra classi CSL ora definita gode delle classiche proprietà commutativa ed associativa di cui gode l'operazione omonima tra numeri razionali. Si osserva inoltre che la classe costituita da tutti i razionali minori di 1 [rappresentati elementarmente dalle cosiddette "*frazioni proprie*"] è l'elemento neutro per l'operazione di prodotto. Questa inoltre risulta essere distributiva rispetto all'operazione di somma. Infine si ha che l'operazione di prodotto, eseguita su due classi che hanno estremo superiore, conduce ad una classe che ha pure un estremo superiore, e precisamente quello che si ottiene facendo il prodotto [nel senso che ha l'operazione per i numeri razionali] degli estremi superiori delle due classi in parola.

7 - Definizione. Una classe A non vuota e superiormente limitata di numeri razionali sarà chiamata *numero reale* ed indicata anche con un unico simbolo, costituito da una lettera greca: per esempio la classe A sarà indicata con la lettera α. L'insieme di tutti i numeri reali così costruiti sarà indicato con il simbolo R^+.

OSS.8 - La definizione ora data è giustificata dai fatti seguenti:
I) I nuovi enti costituiscono un effettivo ampliamento dell'insieme Q^+. [Teorema 1].
II) Per i nuovi enti si possono definire certe operazioni aritmetiche, che abbiamo chiamato "somma e prodotto", che hanno le stesse proprietà formali delle operazioni omonime note per i numeri razionali.
III) Infine per i nuovi enti si può definire una relazione di *ordinamento totale*, che è isomorfa alla relazione omonima che sussiste nel campo razionale. [Si veda il successivo paragrafo 8].

Definizione. Dato il numero reale α, costituito dalla classe A, se questa è diversa dalla classe *0* (zero), si indica con il simbolo $\frac{1}{\alpha}$, oppure anche α^{-1}, il numero reale costituito dai reciproci degli elementi della classe A', complementare della A.
Tale numero reale verrà chiamato "*reciproco*" di α. E si verifica che il prodotto di due numeri reali, che sono entrambi diversi dallo 0 e sono l'uno reciproco dell'altro, dà come risultato il numero 1 [costituito dalla classe CSL di tutte le frazioni proprie].

OSS.9 - I reciproci dei numeri della classe complementare della classe *0* (zero) costituiscono una classe che non è superiormente limitata, e quindi non può dar luogo ad un numero reale.

OSS.10. - Con l'introduzione del concetto di reciproco di numero reale l'insieme dei numeri di R^+, diversi dal numero 0 (zero), acquisisce la struttura algebrica di gruppo rispetto all'operazione di prodotto.

8 - Definizione. Date due classi A e B, entrambe CSL, diremo che tra i numeri reali α e β da esse

costituiti intercede la relazione che indicheremo scrivendo:

$$(6)\ \alpha < \beta$$

[e leggendo *"α è minore di β"*] se la classe *A* è inclusa nella classe *B*, cioè è un sottoinsieme proprio di essa.

OSS.11 - Si dimostra che la relazione ora introdotta induce nell'insieme R^+ un ordinamento totale. In particolare quindi d'ora innanzi avrà senso parlare anche di classi CSL di numeri reali.

Definizione. Se due numeri reali α e β stanno tra loro nella relazione (6), si definisce il numero reale γ, che indicheremo col simbolo:

$$(7)\ \gamma = \beta - \alpha$$

e chiameremo "*differenza*" dei numeri β ed α; esso è quel numero reale costituito dalla classe CSL dei numeri che si ottengono sottraendo dai numeri della classe *B*, CSL, i numeri della classe *A*, anch'essa CSL, quando l'operazione sia possibile, e cioè il minuendo sia non minore del sottraendo.

9 - Teorema 2 - [*Teorema di completezza del campo reale*]. Ogni classe CSL di numeri reali determina una classe CSL di numeri razionali, e quindi un numero reale.
(In termini intuitivi si potrebbe dire che il campo reale non è ampliabile con un'operazione come quella che ci ha condotti a costruire i reali a partire dai razionali.)

La dimostrazione del Teorema si ottiene osservando che ogni numero di una classe CSL di numeri reali è a sua volta costituito da una classe CSL di razionali; tutti i numeri razionali appartenenti a classi cosiffatte costituiscono quindi un'unica classe CSL, e quindi un unico numero reale.

COROLLARIO - Non vi è luogo di parlare di un "Postulato di continuità del campo reale".

OSS.11 - Un teorema analogo a quello or ora dimostrato si incontra anche nelle altre impostazioni della costruzione del campo reale, impostazioni di cui abbiamo detto nel N.1.

10 - NOTA 1 - G. Peano diceva che il rigore consiste nel dire soltanto cose vere. Ed aggiungeva che non è necessario dimostrare tutto, ma che non si deve chiamare "*postulato*" una proposizione che si può dimostrare, e che quindi è un teorema; anche se per brevità o per altre ragioni si omette di esporre le dimostrazione.

Lo stesso Peano, nel "Formulario Mathematico", costruisce il campo reale senza enunciare alcun altro postulato, oltre ai celebri 5 assiomi dell'aritmetica. Egli presenta il numero reale come estremo superiore di una classe di numeri razionali; le critiche mosse alla impostazione peaniana si riferiscono alla struttura logica della sua esposizione, ma non alla mancanza di un postulato apposito. Infatti si scrisse che Peano dà una "*definizione per astrazione*", perché enuncia le condizioni affinché due numeri reali siano uguali, cioè perché due espressioni simboliche diverse rappresentino lo stesso ente.

A ben guardare questa procedura è stata adottata anche da Euclide [o se si vuole dal grandissimo Eudosso]: infatti [Cfr. pag. 9, Definizione 5], in Euclide non si trova la definizione di "che cosa è il rapporto di due grandezze", ma soltanto si trova enunciata la condizione perché si possa dire che due coppie di grandezze abbiano lo stesso rapporto.

La questione è spiegata estesamente da Heath [The thirteen books of Euclid's Elements] e da Frajese [Euclide. Ed. UTET], a proposito della celebre lacuna logica che si incontra nella teoria classica delle proporzioni, laddove si tratta di accertare la esistenza della grandezza quarta proporzionale dopo tre grandezze date. Proprio l'esistenza di tale lacuna è una delle ragioni che giustificano la convenienza di enunciare un postulato di continuità per le grandezze [non per i numeri reali, che non ne hanno bisogno !].

NOTA 2 - È noto che, nella pratica dei calcoli numerici concreti si utilizzano i cosiddetti "numeri decimali" [cioè le frazioni i cui denominatori sono potenze del 10, base della nostra numerazione pratica], e con l'impiego della virgola. [Questa è adottata dalle convenzioni internazionali, anche se oggi diventa sempre più frequente l'impiego del punto, il che è spesso fonte di notevoli confusioni]. Poiché è praticamente impossibile manovrare con infiniti numeri, la abituale rappresentazione decimale dei numeri costituisce in pratica un "*campionamento*" delle classi CSL con le quali abbiamo costruito qui il concetto di numero reale.

È pure noto che, considerato un numero reale α, costituito da una classe A, CSL, gli elementi di questa classe vengono denominati abitualmente "*valori approssimati per difetto*" di α; e quelli della classe complementare A' vengono chiamati "*valori approssimati per eccesso di* α".

A questo proposito conviene ricordare molte consuetudini purtroppo diffuse, che forniscono informazioni non sempre esatte. Così per esempio, indicando provvisoriamente con α il numero reale definito dalla classe CSL data dalla (2), si trova spesso scritto:

(8) α = 1,732051 ,

scrittura che potrebbe indurre il lettore sprovveduto a pensare che α sia il numero razionale

(9) $1732051/10^6$.

Invece la scrittura corretta dovrebbe essere:

(10) α = 1,7320511...

la quale informa convenzionalmente sui seguenti fatti:

I) Il razionale (9) non coincide con il reale α, ma è soltanto un elemento della classe che lo costituisce o, se si vuole, un valore approssimato per difetto.

II) A partire dal simbolo (10) è possibile determinare altri razionali appartenenti alla classe in parola, precisamente:

(11) 1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205; 1,732051; 1,7320511……

III) A partire dai numeri (11) si possono costruire altrettanti numeri della classe complementare A' [valori approssimati per eccesso]; essi sono:

(12) 2; 1,8; 1,74; 1,733; 1,7321; 1,73206; 1,732052; 1,7320512…..

IV) Esistono procedure ben determinate per ottenere un numero qualsiasi di altri elementi delle due classi, e quindi per migliorare indefinitamente le informazioni che si posseggono.

Q.B.F.F.Q.S. 010498

(N.d.R. *Quod bonum, faustum, felix fortunatumque sit populo Romano Quiritibus*)

Reimpaginato Maggio 2013