

Paolo Uccello. Studio prospettico. Galleria degli Uffizi, Firenze.

FORMULE per la rappresentazione assonometrica della sfera e delle sue sezioni piane.

1 PREMESSE e convenzioni.

È dato nello spazio un sistema cartesiano ortogonale monometrico di assi x, y, z . Supporremo che il piano degli assi y e z sia quello del disegno, o della pagina, e che gli assi in parola siano disposti in modo tale che l'asse delle y sia orizzontale, ed orientato positivamente da sinistra a destra rispetto ad un osservatore che guarda il disegno, e che l'asse delle z appaia verticale ed orientato positivamente dal basso verso l'alto, sempre rispetto all'osservatore in parola. Supporremo infine che l'asse delle x "esca" dal piano del disegno, avendo la sua parte positiva nel semispazio in cui sta l'osservatore.

In seguito il piano del disegno sarà anche chiamato "quadro"; supporremo inoltre che l'osservatore sia situato in un punto *improprio* (o all'infinito) che indicheremo con Ω , al quale attribuiremo le seguenti coordinate omogenee:

$$(1) \quad \Omega = [1, q, r, 0] \quad ; \quad q, r > 0.$$

OSSERVAZIONE 1 - Il fatto che la prima coordinata omogenea di Ω sia stata posta uguale ad 1 implica che il punto stesso debba essere sempre scelto fuori del quadro.

Si consideri ora un punto P dello spazio, e siano a, b, c le sue coordinate; la retta congiungente P con Ω può essere rappresentata con le equazioni parametriche:

$$(2) \quad x = a + t, \quad y = b + q t, \quad z = c + r t, \quad t \in R;$$

oppure, eliminando il parametro t , con le due equazioni:

$$(2 a) \quad x - a = \frac{y-b}{q} = \frac{z-c}{r}.$$

Indicheremo col simbolo P_0 il punto del quadro di coordinate:

$$(3) \quad x = 0, \quad y = b - a q, \quad z = c - ar,$$

che è l'intersezione del quadro stesso con la retta (2). Tale punto sarà chiamato nel seguito la *immagine* di P da Ω (ovviamente sul quadro). Analoghi significati avrà il termine "immagine" quando nel seguito sarà utilizzato in relazione a curve o a luoghi di punti.

Si consideri il polinomio:

$$(4) \quad S(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

L'equazione : (5) $S - 1 = 0$, rappresenta, come è noto, una sfera avente il centro nell'origine del riferimento cartesiano e raggio 1. Sia poi il polinomio:

$$(6) \quad G(x, y, z) = x + q y + r z ;$$

l'equazione: (7) $G = 0$, rappresenta il piano per l'origine, ortogonale alla retta (2). La circonferenza intersecata dal piano (7) sulla sfera (5) verrà chiamata, come d'abitudine, *contorno apparente* della sfera (5) dal punto di vista Ω .

$$\text{Poniamo ora: (8) } s^2 = 1 + q^2 + r^2.$$

OSSERVAZIONE 2 - L'equazione:

$$(9) \quad (G(x, y, z))^2 - s^2(S(x, y, z) - 1) = 0$$

rappresenta la superficie cilindrica costituita dalle rette (tutte tra loro parallele) che passano per Ω e sono tangenti alla sfera (5) nei punti del contorno apparente.

La verifica di questo fatto si ottiene osservando che si ha:

$$(10) \quad G(x, y, z)^2 - s^2 S(x, y, z) + (y - qx)^2 + (qz - ry)^2 + (rx - z)^2 = 0.$$

Pertanto l'intersezione della quadrica (9) col piano improprio è costituita da una coppia di rette che passano per Ω . Inoltre la retta (2) non ha intersezioni al finito con la quadrica stessa.

Poniamo ora: (11) $H(0, y, z) = (G(0, y, z))^2 - s^2(S(0, y, z) - 1)$; l'equazione:

$$(12) \quad H(0, y, z) = (qy + rz)^2 - s^2(y^2 + z^2 - 1) = 0,$$

rappresenta l'intersezione del quadro (di equazione $x = 0$) con il cilindro (9). Essa rappresenta quindi l'immagine del contorno apparente della sfera (5) dal punto di vista Ω . Si tratta ovviamente di una conica, avente il suo centro nell'origine degli assi y e z , ma in generale non riferita a questi assi. Inoltre dalla forma dell'equazione (12) si deduce facilmente che la conica del piano y, z rappresentata dalla (12) è bitangente alla circonferenza di equazione:

$$(12 a) \quad y^2 + z^2 - 1 = 0$$

nei punti in cui essa è incontrata dalla retta di equazione:

$$(12 b) \quad q y + r z = 0. \quad (*)$$

2. SIMMETRIE della sfera in sé.

Si consideri la omologia involutoria affine (simmetria) che ha per centro il punto Ω ed ha come piano assiale il piano (7). Le equazioni di tale trasformazione sono:

$$(13) \quad X = x - 2 \frac{G(x,y,z)}{s^2}, \quad Y = y - 2q \frac{G(x,y,z)}{s^2}, \quad Z = z - 2r \frac{G(x,y,z)}{s^2}.$$

Si verifica facilmente che la trasformazione (13) è involutoria, e che trasforma in sé la sfera (5). Si ha in particolare che ogni punto del piano (7) è unito per le (13) e che vale:

$$(14) \quad G(x, y, z) + G(X, Y, Z) = 0.$$

3. IMMAGINI delle rette dello spazio.

Siano dati due polinomi di primo grado nelle variabili x, y, z :

$$(15) \quad U(x, y, z) = ux + vy + wz; \quad U'(x, y, z) = u'x + v'y + w'z.$$

Porremo:

$$(16) \quad U(\Omega) = u + vq + wr; \quad U'(\Omega) = u' + v'q + w'r.$$

Ponendo:

$$(17) \quad F(x, y, z) = [U(x, y, z) - 1]U'(\Omega) - [U'(x, y, z) - 1]U(\Omega),$$

si verifica che il piano di equazione: (18) $F(x, y, z) = 0$, passa per il punto improprio Ω . Pertanto la retta del quadro che ha equazione:

$$(19) F(0, y, z) = 0$$

è l'immagine sul quadro della retta dello spazio rappresentata dal sistema:

$$(20) U(x, y, z) = U'(x, y, z) = 1.$$

In particolare si ha che l'asse delle x , definito nello spazio dal sistema:

$$(21) y = z = 0,$$

ha come immagine la retta del quadro di equazione : (22) $ry - qz = 0$.

4. IMMAGINI delle circonferenze sezioni piane della sfera.

Si consideri anzitutto la circonferenza che è secata sulla sfera (5) dal piano di equazione:

$$(23) U(x, y, z) = ux + vy + wz = 0,$$

passante per l'origine degli assi. La simmetria data dalle (13) di cui al N. 2 fa corrispondere al piano (23) il piano rappresentato dall'equazione:

$$(24) U(X, Y, Z) = 0,$$

essendo le X, Y, Z date dalle (13). Sviluppando i calcoli in base alle (13) si ottiene:

$$(25) U(X, Y, Z) = U(x, y, z) - 2 \frac{U(\Omega)G(x, y, z)}{s^2}.$$

Consideriamo ora la quadrica degenera, costituita dalla coppia di piani (23) e (24), ed osserviamo che essa interseca sulla sfera (5) una coppia di circonferenze le quali sono portate involutoriamente una nell'altra dalla simmetria rappresentata dalle (13). Quindi tali due circonferenze non saranno "viste" dal centro di omologia Ω come distinte, ed avranno perciò una unica immagine sul quadro. Tale immagine si può determinare in base ai calcoli fin qui svolti nel modo seguente. Poniamo:

$$(26) K(x, y, z) = U(X, Y, Z) U(x, y, z) = U(x, y, z)^2 - 2 U(x, y, z)U(\Omega) \frac{G(x, y, z)}{s^2} ;$$

si ha quindi:

$$(27) K(x, y, z) = \left(U(x, y, z) - U(\Omega) \frac{G(x, y, z)}{s^2} \right)^2 - \left(\frac{U(\Omega)}{s^2} G(x, y, z) \right)^2.$$

Poniamo ora:

$$(28) M(x, y, z) = K(x, y, z) - (U(\Omega))^2 \frac{S(x, y, z) - 1}{s^2}.$$

In base alle posizioni fatte, si verifica che l'equazione: (29) $M(x, y, z) = 0$, risulta essere combinazione lineare dell'equazione che rappresenta la coppia di piani (26) e di quella che rappresenta la sfera (5); si verifica direttamente, con procedure analoghe a quelle seguite nella OSS.2, che essa rappresenta un cilindro, costituito dalle rette tutte parallele alla (2), il quale proietta da Ω le circonferenze sezioni della sfera (5) con i piani della coppia (26). Pertanto la equazione: (30) $M(0, y, z) = 0$, rappresenta sul quadro l'immagine (unica) delle circonferenze in parola. Tenendo conto dei calcoli sviluppati finora, si ottiene la equazione della (unica) immagine delle circonferenze secate sulla sfera (5) dai piani della coppia (26). A calcoli eseguiti si ha:

$$(31) M(0, y, z) = \left(vy + wz - \frac{(qy+rz)U(\Omega)}{s^2} \right)^2 - H(0, y, z) \left(\frac{U(\Omega)}{s^2} \right)^2 = 0.$$

Dalla forma della equazione (31) si trae che l'immagine delle circonferenze in parola è bitangente alla immagine del contorno apparente, nei punti in cui tale immagine è intersecata dalla retta di equazione:

$$(32) vy + wz - \frac{(qy+rz)U(\Omega)}{s^2} = 0.$$

OSSERVAZIONE 3 - La proprietà della conica (31) enunciata nell'ultima frase scritta poco sopra è soltanto un caso molto particolare di una proprietà più generale, relativa alle proiezioni delle curve tracciate su superfici. La dimostrazione di tale proprietà viene abitualmente conseguita impiegando gli strumenti della Geometria differenziale, e pertanto non viene qui riportata. Ci limitiamo ad enunciarla nei termini seguenti:

Sia P_0 un punto del quadro, che è proiezione del contorno apparente di una superficie dello spazio; supponiamo che P_0 appartenga anche alla immagine di una curva regolare tracciata sulla superficie, e che la tangente a tale curva nel punto non passi per il centro di proiezione Ω ; allora la proiezione della curva e quella del contorno apparente della superficie sono tangenti tra loro in P_0 .

OSSERVAZIONE 4 - Le immagini della sezione della sfera (5) con un piano dello spazio non passante per l'origine, e quindi rappresentabile nella forma :

$$(33) \quad U(x, y, z) - 1 = 0,$$

si ottengono con procedure analoghe a quelle che abbiamo descritto ed hanno proprietà pure analoghe; lasciamo gli ovvi sviluppi dei calcoli al Lettore colto e volenteroso.

5. CASI particolari

Tratteremo qui dei problemi particolari, in cui le immagini delle curve che si considerano possono essere determinate anche senza ricorrere alle procedure generali che abbiamo esposto finora. Precisamente determineremo direttamente le immagini delle circonferenze che sono sezioni della sfera (5) con i piani coordinati. Anzitutto osserviamo che la sezione della sfera con il piano di equazione $x = 0$ giace ovviamente sul piano stesso, che abbiamo chiamato "quadro". Dunque, nelle coordinate y e z tale sezione è rappresentata dalla equazione:

$$(34) \quad y^2 + z^2 - 1 = 0;$$

e, considerando l'equazione (12), che rappresenta l'immagine del contorno apparente della sfera, si verifica immediatamente che la (34) è bitangente a tale immagine.

Per quanto riguarda la sezione della sfera col piano $y = 0$ si può procedere nel modo seguente. Considerato il punto P dello spazio, siano $a, 0, c$ le sue coordinate cartesiane. Si ha ovviamente:

$$(35) \quad a^2 + c^2 - 1 = 0;$$

dalle (2), ponendo ovviamente $b = 0$, eliminando t e tenendo conto della (35) si ottiene l'equazione:

$$(36) \quad (qx - y)^2 + (qz - ry)^2 = q^2,$$

che rappresenta il cilindro, luogo delle rette passanti per Ω , cioè parallele alla (2), e passanti per i punti della circonferenza sezione della sfera (5) con il piano $y = 0$.

La sezione del cilindro (36) col quadro è quindi l'immagine della circonferenza in parola: essa è data dall'equazione:

$$(37) \quad y^2 + (qz - ry)^2 - q^2 = 0 ;$$

questa rappresenta nel piano degli assi y, z una conica, e precisamente una ellisse, che ha il suo centro nell'origine, ma che non è riferita agli assi.

Indichiamo ora con $B(y, z)$ il polinomio che è al primo membro della (37); con calcoli non difficili si verifica che si ha:

$$(38) \quad q^2 H(0, y, z) - s^2 B(y, z) = ((1 + r^2)y - qrz)^2 ;$$

e da questa relazione si trae che l'immagine della circonferenza, data dalla (37), è bitangente alla immagine del contorno apparente, nei punti in cui entrambe le coniche sono incontrate dalla retta di equazione:

$$(39) \quad (1 + r^2)y - q r z = 0.$$

Analogamente si trova che la circonferenza secata sulla sfera (5) dal piano $z = 0$ ha come immagine la ellisse rappresentata dall'equazione:

$$(40) \quad z^2 + (ry - qz)^2 - r^2 = 0,$$

e che questa è bitangente alla immagine del contorno apparente nei punti in cui entrambe le coniche sono intersecate dalla retta di equazione:

$$(41) \quad (1 + q^2)z - qry = 0.$$

(*) NOTA - Il fatto che dalla forma di una equazione come la (12) si possa dedurre che due certe coniche siano bitangenti tra loro verrà richiamato in seguito varie volte. Pertanto ne diamo qui una giustificazione sommaria, utilizzando nozioni elementari di geometria analitica (ed impiegando notazioni diverse da quelle che usiamo nel corso della trattazione).

In un piano riferito ad una coppia di assi cartesiani x, y si considerino due coniche, rappresentate da due equazioni :

$$(1^*) \quad f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0 ;$$

si consideri poi una retta, rappresentata da una equazione lineare nelle due variabili x, y : (2*) $h(x, y) = 0$.

Supponiamo che le due coniche non siano spezzate (degeneri) e che sussista la relazione:

$$(3^*) f(x, y) + g(x, y) + (h(x, y))^2 = 0 .$$

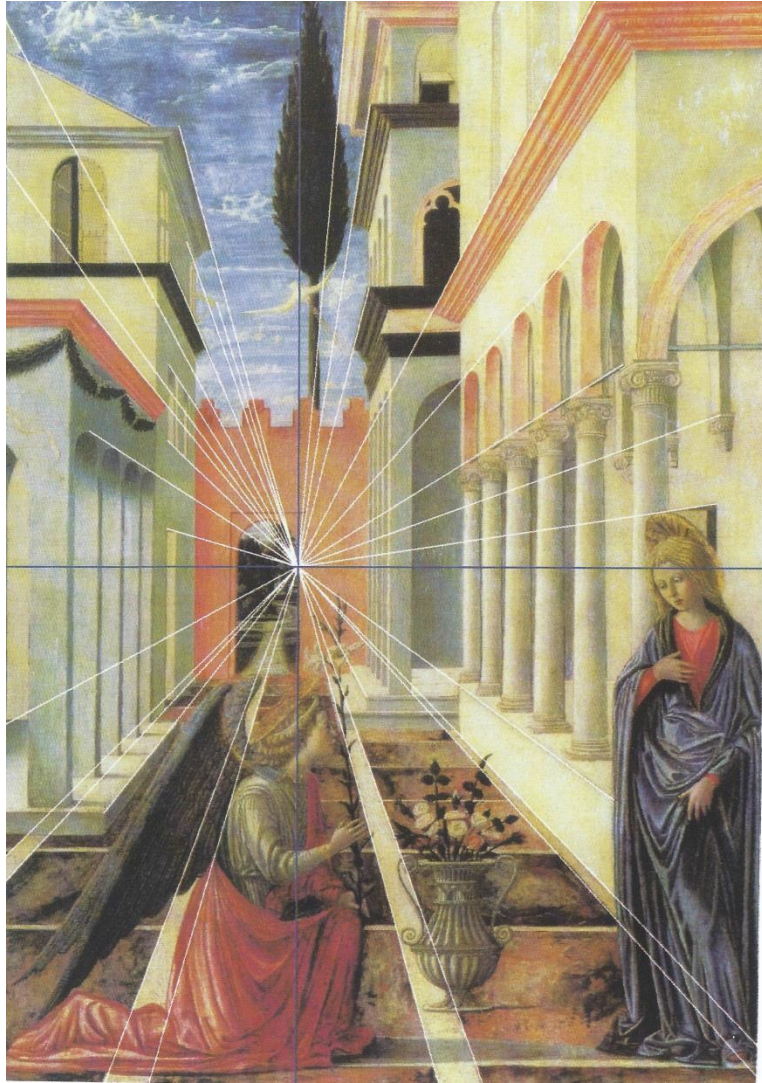
Supponiamo inoltre che esista un punto P a coordinate reali a, b tali che appartenga a due tra le tre curve rappresentate dalle (1^*) e dalla (2^*) ; allora, in conseguenza della (3^*) , P appartiene anche alla terza. Inoltre, considerata la retta tangente in P ad una delle due coniche (1^*) , si verifica che, in conseguenza della (3^*) , essa è pure tangente all'altra; infatti la equazione lineare che fornisce in tal caso le coordinate della intersezione della tangente con la prima conica, sempre in conseguenza della (3^*) , risulta avere una radice doppia in corrispondenza delle coordinate di P ; quindi tale equazione lineare risulta avere una radice doppia anche in corrispondenza alle intersezioni della retta con la seconda conica.

Nel caso in cui non esista alcun punto a coordinate reali comune alla due coniche (1^*) il sussistere di una relazione come la (3^*) porta come conseguenza l'esistenza di una omologia piana che porta una conica nell'altra ed ha come asse la retta (2^*) .

Lasciamo al Lettore la discussione dei casi limite, riguardanti posizioni reciproche particolari tra le due coniche (come osculazione ed iperosculazione).

C.F.M. Milano, agosto 2001.

File reimpaginato giugno 2014



Fra' Carnevale. Annunciazione (1455?). National Gallery of Art, Washington D.C. In mostra a Brera, Milano, 2004.

Dal Catalogo della Mostra.