UNIVERSITÀ degli STUDI di MILANO
Cattedra di Psicologia della
Facoltà Medica.

COMUNE DI MILANO
Istituto di Psicologia
Sperimentale

Il giorno .... 11 9 dicembre 1965 ...... alle ore 21, presso la Sede dell' Istituto di Psicologia Sperimentale, in via F. Filzi 20, ... il Prof. Carlo Felice Manara, Ordinario ...... di geometria all'Università degli Studi di Milano ...... svolgerà la seguente relazione: ...... **Problemi psicologici dell'invenzione matematica.** ......

La S. V. è invitata ad intervenire.

Prof. MARCELLO CESA - BIANCHI

1 - Vari sono i problemi psicologici che riguardano il pensiero matematico creativo; mi interessano per varie ragioni, qualcuna delle quali ritengo opportuno esporre qui. Anzitutto in linea teorica, perché essendo stato a contatto con molti matematici di prim'ordine ed avendo avuto occasione di conoscerne altri per sentito dire, mi interessa sapere quali siano i processi mentali con i quali essi sono arrivati alle loro scoperte.

In secondo luogo perché la matematica moderna sta diventando da un certo punto di vista una scienza base per tutte le altre scienze, e mi interessa quindi sapere quali siano i processi mentali che determinano questo tipo caratteristico di pensiero che è il pensiero matematico. È noto a tutti i presenti che il Piaget ha costruito tutta una teoria psicologica ricalcandola - si può dire - sul pensiero matematico: quando molti anni fa un mio amico studioso di psicologia mi accennò a certe idee di Piaget, riconobbi subito che queste erano state mutuate dalla matematica. Mi sono poi messo a leggere le opere dell'autore e della sua scuola ed ho potuto convincermi della vastità dell'influenza che il pensiero matematico moderno ha avuto su di lui. Non è mio compito qui cercare di criticare tutta una scuola: non ne ho la possibilità, né cercare di valorizzare un'intera scuola: non ne ha bisogno. Rilevo qui soltanto un aspetto, per così dire storico, della situazione attuale, aspetto che riguarda gli strettissimi rapporti che la matematica ha con le altre scienze.

Ritornerò su questo discorso per precisare che cosa intendo per matematica; voglio ora ricordare soltanto una terza ragione per cui mi interessa iniziare qui il discorso con i cultori di psicologia: ragione che vorrei chiamare didattica. Invero non so se è stato accuratamente studiato il capitolo che riguarda la precisazione di che cosa si intende per attitudine matematica: la cosa ha per me un grandissimo interesse per due ragioni: perché ormai come professione la mia è quella di insegnare la matematica e di giudicare sugli studenti di questa disciplina; e spesso anche mi capita di dover consigliare qualcuno ad intraprendere o no certi studi. Si tratta di compiti molto difficili, che io vorrei assolvere con la massima coscienza di far bene; pertanto vorrei conoscere, per quanto una persona che ha la mia competenza può conoscere, anche qualcosa della situazione psicologica di un individuo. Mi rendo ben conto del fatto che si tratta di un problema molto complicato e serio; ma mi pare questa una buona ragione per studiarlo insieme.

2 - Ricordo anzitutto un fatto, cui ho già accennato; ripeto qui che la matematica sta diventando una specie di quadro

naturale, di fondamento di ogni altro pensiero scientifico; ho anche detto che occorre intendersi su quale tipo di matematica. In questi ultimi decenni abbiamo infatti assistito ad uno sviluppo tumultuoso di questa scienza e ad una revisione basilare dei suoi concetti: come risultato di questo processo di evoluzione, abbiamo oggi una matematica diversa da quella che ci hanno insegnata a scuola e che è la sola conosciuta da molte persone colte.

Si potrebbe dire che la matematica tradizionale, ancora oggi magari la sola conosciuta anche da persone che fanno uso della matematica superiore, si adattava più o meno bene alla concezione di "scienza dei numeri", ovvero anche "scienza della quantità", che le veniva da una classificazione secolare. Potremmo anche dire che una scienza cosiffatta era in certo modo considerata come una scienza di contenuti anche se ideali. Per mettere a fuoco questa mia affermazione, si pensi alla Geometria, per esempio. Da quando Euclide ci diede quel suo primo meraviglioso trattato, il primo nella storia che sia ad un livello scientifico, non vi è stato dubbio alcuno sul fatto che la Geometria dicesse qualche cosa di qualche cosa: per esempio dicesse qualche cosa attorno alle “figure geometriche”, oppure allo “spazio geometrico”, agli enti insomma di cui parlava.

Soltanto la nascita della Geometria non euclidea, con la dimostrazione della compatibilità logica di questa e la conseguente crisi logica e psicologica, portò gradatamente a cambiare il nostro modo di concepire la Geometria e ci condusse alla visione attuale di una specie di "gioco logico", che non è strutturato con i canoni classici di andare dal noto, al meno noto, all'ignoto, di osservare quelle proprietà dei suoi oggetti che sono "evidenti" e dedurre quelle meno evidenti, ma è una catena di proposizioni, per così dire "vuote", i cui anelli iniziali sono “scelti”, in certa misura ci sono suggeriti, non imposti, dalla realtà e dall’osservazione e sono atti a descrivere e dedurre certe proprietà del mondo di oggetti che ci circonda.

Da questa nuova visione della Geometria, scienza che credevamo di conoscere e che invece ci si presenta forse sotto aspetti nuovi, si può passare a quella dell’intera Matematica moderna; per fare un esempio pensiamo all’impostazione classica: ci sono i numeri interi, noi pensiamo di operare su di essi e scopriamo quindi le proprietà delle operazioni; estendiamo poi la classe dei numeri interi, costruendo in qualche modo (ritorneremo sopra questa circostanza) altri numeri: razionali, reali, complessi, e studiamo le proprietà delle operazioni che eseguiamo su di essi. Per dire le cose in modo molto approssimato, si pensava che fosse il contenuto (cioè i numeri delle varie specie) a determinare le proprietà delle operazioni. La visione della Matematica moderna è in certo modo capovolta: il nuovo rifiorire degli studi di Algebra fa sì che oggi si pensi prima alle operazioni che agli enti che devono sottostare ad esse: quindi le varie specie di numeri, per così dire, non vengono prima delle operazioni, ma dopo, sono per così dire create dalle proprietà delle operazioni che ad essi si applicano. Questa nuova impostazione ha fatto sì che il campo degli enti ai quali i concetti matematici si applicano si estendesse a dismisura: la Matematica ha assunto la fisonomia della più generale teoria dei sistemi formali, i quali si applicano ai numeri come a tanti altri oggetti. Per esempio è noto che le relazioni di dominio in una classe sociale si possono schematizzare mediante formalismi, che rientrano nella Matematica non in quanto sono quantificanti (secondo la vecchia concezione della Matematica come scienza della quantità) ma semplicemente sono simbolizzabili con simboli che hanno una loro algebra, certe loro leggi di deduzione e quindi permettono di fare delle deduzioni ineccepibili. Queste idee hanno quindi portato anche ad una estensione del concetto di soluzione di un problema matematico: molti sono abituati a considerare questa come l’applicazione di una formula, già confezionata. Invece la risoluzione di un problema matematico è soltanto un procedimento logico che porta razionalmente ad avere maggiori informazioni rispetto a quelle che si avevano all'inizio.

Questo procedimento razionale può essere per esempio l’applicazione di formule, come può essere la consultazione di tavole (cioè l’utilizzazione di calcoli già fatti), oppure l’utilizzazione delle proprietà di certi circuiti elettrici dei calcolatori elettronici, mediante i quali sono state simbolizzate le relazioni che caratterizzano il problema che si tratta di risolvere.

3 – Ho dato un cenno delle proprietà e dell’estensione del pensiero matematico, così come è concepito oggi, perché questo ci può aiutare nell’analisi delle caratteristiche del pensiero stesso. Mi pare di poter concludere da quanto precede che uno degli aspetti essenziali è il fatto che il procedimento matematico porta ad una simbolizzazione, che ha, secondo me, i due caratteri fondamentali di essere artificiale ed astratta.

Uso questi due termini in modo molto generico: vorrei spiegare (non definire) i termini, dicendo che quando parlo di simbolo artificiale, vorrei distinguerlo dal simbolo verbale, che in certo senso può essere considerato come "naturale"; astratto nel senso che vorrebbe essere più distaccato dalla realtà di quanto non sia il linguaggio abituale, perché mira per sua natura ad una generalità che vorrebbe investire tutti i casi possibili che si presenteranno nelle stesse vesti formali. In questo ordine di idee si può dire che anche l'uso di uno strumento così rudimentale come il pallottoliere è un procedimento tipicamente matematico: perché le singole sferette del pallottoliere stanno ad indicare certi oggetti che vogliamo simbolizzare e perché il fatto che le sferette siano infilate su certe stecche e siano poste in vari ordini sta a simboleggiare una certa legge di movimento delle sferette stesse, una "logica interna" al sistema, che simbolizza l'algebra dei simboli che noi usiamo in uno stadio più raffinato. Del resto non è essenzialmente diverso ciò che noi facciamo quando affidiamo i calcoli alle leggi materiali che governano i circuiti di un calcolatore elettronico.

In quest’ordine di idee pure mi piace ricordare ciò che un Autore che ho letto considera come essenziale nelle capacità del matematico: la capacità di "cifrare e di decifrare", cioè di simbolizzare e di tradurre dal simbolo al simboleggiato.

A questo proposito mi pare di poter osservare che esistono vari livelli psicologici in questa capacità; livelli nei quali si potrebbe trovare forse una delle chiavi per poter cercare la soluzione di qualche problema che ci interessa qui. Mi è accaduto spesso di dover osservare che vari giovani, ai quali non si poteva negare una certa intelligenza ed abilità nella intuizione per esempio del funzionamento di certi macchinari, che sapevano anche "leggere" delle figure che riproducono delle situazioni di macchine o di strutture portanti, risultavano poi totalmente smarriti di fronte ai simboli matematici che riproducevano le situazioni e le leggi in basi alle quali le macchine si muovevano. Ciò accade spesso per esempio in relazione ai problemi di Meccanica Razionale. È questo un fenomeno sul quale vorrei essere illuminato e che ritengo essere uno dei fenomeni fondamentali del pensiero matematico: la possibilità di usare di simboli che vorrei dire astratti, perché non so come classificare altrimenti.

4 - Vale la pena di interrompere il discorso che ho iniziato per rilevare l’importanza del simbolo nel ragionamento matematico. Ho già avuto occasione di dire che mi pare di poter affermare che il simbolo matematico sia di una specie (psicologica, se non logica) del tutto particolare. Ma vale la pena di osservare che un simbolo ci deve essere e che si potrebbe affermare che il progresso sostanziale della Matematica occidentale, progresso che iniziò nel Rinascimento, va di pari passo con l’adozione delle cifre arabe per la rappresentazione dei numeri, e che d'altra parte ogni progresso sostanziale del pensiero matematico va di pari passo con l’invenzione di un simbolo appropriato, di una convenzione di rappresentazione degli enti che sono scoperti ed utilizzati. Su questo argomento ritorneremo in seguito quando riporteremo il pensiero di Hadamard sul fenomeno della scoperta matematica.

Tuttavia vorrei poter dire anche un'altra cosa: il simbolo matematico non è soltanto un segno che è posto a rappresentare qualche altra cosa: esso è, almeno tendenzialmente, un simbolo che tende ad organizzarsi una sua propria sintassi, esso nasce con le regole per la sua utilizzazione, esso ha per così dire una sua vita propria ed una sua logica propria. Questi caratteri, che sono propri di tutti i simboli matematici (in vario grado si capisce), formano forse la difficoltà per l'uso e la "lettura" dei simboli matematici, che ferma molti alle soglie di una scienza così affascinante. Tuttavia anche queste osservazioni possono forse portare alla soluzione del problema di cercare in che cosa stia uno dei caratteri del ragionamento matematico. In questo, ripeto, mi pare stia una delle circostanze fondamentali del pensiero matematico; questa possibilità di cifrare e decifrare, con dei simboli tuttavia che hanno una loro logica propria.

5 - Quanto abbiamo detto finora, ci introduce ad una prima visione del fenomeno della creatività nel campo matematico. A tale proposito esiste come ho detto un classico libro di J. Hadamard (*), un matematico di primissimo ordine, che aveva esperienza di questo lavoro creativo e che, per il suo prestigio, ha potuto raccogliere anche le testimonianze di altri matematici di prim'ordine del nostro tempo. Ritengo che l'analisi sia utile perché penso che ogni pensiero matematico non possa essere esente, almeno in minima parte, da un certo carattere di creatività. Mi ricordo di aver assistito ad una conferenza a proposito di tests psicologici, nella quale appunto veniva messa in rilievo la parte di invenzione e di creatività che deve sussistere anche nella minima operazione di risoluzione di problemi matematici. Vorrei rilevare che non è mai possibile una supina applicazione di formule e di procedimenti; noi assistiamo molto spesso a fenomeni di questo genere agli esami: la ripetizione fedele non è segno di aver capito, e spesso la ripetizione fedele può andare insieme con la mancanza di spirito matematico, perché manca totalmente lo sforzo di far proprio un certo sistema di pensiero e di rendere attivo il procedimento di soluzione.

A questo proposito sono particolarmente interessanti i libri di Pólya: "*Matematica e ragionamento plausibile*", e l'altro: "*Come si risolve*", che è una guida alla risoluzione dei problemi: direi che è una guida non alla risoluzione supina e passiva, cioè all'applicazione pedissequa delle regole, ma ad una soluzione attiva, che in certo modo richiede una creazione, o almeno una ricreazione ogni volta per ogni soluzione dei problemi. Vi è in questi libri, colmi di buon senso, l'esperienza di un matematico di primo ordine e di un didatta pure di primo ordine; in forma scherzosa il Pólya richiama certi proverbi che riguardano il professore di matematica, quale è raffigurato dai quadretti classici dell'umorismo internazionale: esageratamente distratto, con un ombrello in ogni mano, che preferisce rivolgersi alla lavagna piuttosto che all'uditorio, che scrive "a", pronuncia "b", vuol dire "c", e dovrebbe essere "d".

Alcuni di questi detti sono puramente umoristici: "La Geometria è l'arte di fare dei ragionamenti giusti sulle figure sbagliate", oppure: "Questo principio è così perfettamente generale che non ammette nessuna applicazione particolare". Oppure: "La differenza tra un artificio ed un metodo è che il metodo è un artificio applicato due volte". Ma altre proposizioni sono forse più profonde di quanto non sembri: "Il mio metodo per superare una difficoltà è quello di evitarla", ed anche: "Per risolvere una equazione differenziale, la si guarda fino a che la soluzione vi viene".

Questi due ultimi detti fanno chiaramente appello ad un lavorio inconscio, ad un sottofondo psicologico del lavorio di creazione matematica, che sarà oggetto delle nostre considerazioni successive. Non voglio però che si inizi questa discussione senza ricordare quello che dice ancora il Pólya in un'altra pagina: " Usate anzitutto la vostra testa prima di usare i metodi e le formule".

6 - E veniamo finalmente all'argomento che ci interessa qui: la creatività nel pensiero matematico. Chi ha meditato su questo argomento porta come caratteristici certi momenti di questo processo, momenti che interessa rilevare qui partitamente. Un primo momento riguarda la fantasia: è certo che tutti i grandi matematici hanno una fantasia creatrice di prim'ordine, e che questa fantasia, capace di creare originalmente, occorre anche, direi, quando si tratta del problema più banale. È questa componente che fa il fascino per esempio della Geometria elementare: non si possono dare regole per la soluzione di un problema: essi si possono classificare grossolanamente sotto certe grandi categorie generiche, ma quando si tratta di risolvere il singolo problema è sempre la fantasia che aiuta. Si tratta della capacità di variare le combinazioni degli elementi, di fare dei "salti" logici per "provare" che cosa succede quando si lasciano cadere oppure si cambiano certe ipotesi, di creare nuovi procedimenti (intendo nuovi in relazione al soggetto, non nuovi in assoluto). Questa fantasia porta qualche matematico a non leggere i lavori degli altri, per il gusto di provarsi con le difficoltà forse, ma anche perché a volte basta un cenno al procedimento seguito da qualche altro perché non si sia più capaci di

uscire dal solco già tracciato, mentre ciò che si vuole è proprio avere una idea "nuova".

Accanto alla fantasia vi sono poi delle proprietà di visualizzazione che si manifestano in modo diverso presso i vari soggetti. Riporta Hadamard che qualche matematico dichiara di "vedere" tipograficamente le formule, qualche altro "vede" le figure. A questo proposito ricordo un episodio della vita di Federigo Enriques, il quale diceva al suo interlocutore di "vedere" il teorema di cui parlava, vederlo "…come vedo quel cagnolino lì".

Questa capacità di visualizzazione, che si manifesta con varie modalità, come abbiamo detto, ci riporta ad una terza circostanza che appare quasi sempre nel lavoro creativo dei grandi matematici: la capacità di lavorio inconscio, che a volte appare quasi come una capacità di divinare i risultati. Hadamard riporta episodi sconcertanti di Poincaré, ma è esperienza comune quella di molti che, dopo aver per molti giorni, forse per qualche settimana o qualche mese, cercato la soluzione di un determinato problema, un bel momento trovano che la soluzione si è presentata da sola con tutti i caratteri dell’evidenza. Qui si ritrova la verità dei due proverbi citati umoristicamente da Pólya come caratteristici del professore di matematica, proverbi che evidentemente rispecchiano l’esperienza del ricercatore: "Per risolvere una equazione differenziale, bisogna stare a guardarla fino a che la soluzione vi viene"; e l'altro: "Per risolvere un problema, cercare di girargli attorno". Questi due procedimenti sono evidentemente rivolti a stabilire uno stato di sintonia con il problema, stato che, mentre evita l'affaticamento mentale riguardante la questione, tiene però inconsciamente il pensiero rivolto nella stessa direzione, fino a che un lavorio interno di cui il soggetto non è conscio lo porta alla scoperta che apparentemente è improvvisa ed ingiustificata, ma che realmente è frutto di tutta una faticosa preparazione.

A questo proposito si suole distinguere i matematici in due grandi categorie psicologiche: i geometri e gli analisti. Dovrebbe essere propria dei primi l'attitudine mentale della intuizione, della visione immediata della verità che si ricerca, magari con l'aiuto delle immagini spaziali, senza il passaggio attraverso i canali della logica; dovrebbe essere propria dei secondi l'analisi paziente di tutti gli anelli logici di una catena di deduzione, per giungere alla conquista di una singola verità, oppure alla costruzione di una intera teoria con un rigore formale ineccepibile. Ma è propria dei due tipi mentali la capacità di divinare i risultati, e di escogitare i procedimenti di dimostrazione, capacità che si riferisce sempre alla fantasia creatrice, seppure con diversi caratteri.

Accanto a questa proprietà di fantasia creatrice vengono messi in evidenza anche altri caratteri dei grandi matematici, caratteri che si riferiscono a quel lavorio inconscio di cui si parlava. Vi è una specie di gusto estetico, che fa scegliere alla mente, anche senza che ne abbia coscienza, una strada che viene giudicata "bella"; molto spesso si sente dire da matematici di un teorema che è "bello" e questo giudizio direi che ha molto in comune con il giudizio estetico, anche se non mi so spiegare il perché.

Questa specie di "gusto" fa sì che esista anche uno "stile" di un matematico rispetto all'altro, per cui chi ha qualche pratica riesce a capire di chi può essere un teorema, oppure tra le varie dimostrazioni di un medesimo teorema, a chi si può ascrivere l'una piuttosto che l'altra. Occorre dire tuttavia che questo "stile" non è una caratteristica del tutto innata: si raffina e si rafforza con il lavoro e con la meditazione. Tuttavia il procedimento di scoperta matematica non finisce così, con la divinazione a volte prodigiosa dei risultati, divinazione che fa superare d'un salto a certe menti il cammino che ad altre richiede procedimenti faticosissimi. Esiste tutto un lavorio successivo che si potrebbe descrivere dicendo che occorre prendere possesso della verità divinata, cioè dimostrare il risultato, formularlo ed utilizzarlo, cioè inserirlo nella struttura di una teoria, o costruirne una nuova, se il caso lo richiede.

Anche in questi stadi si manifesta la fantasia creatrice del matematico di valore; anzitutto nel procedimento che porta ad escogitare la dimostrazione del risultato; questo infatti si presenta a volte come vero, ma il soggetto ne ignora i fondamenti logici: ne è certo, ma per raggiungere la certezza con metodi usuali occorre spesso una grande fatica. Vi sono casi in cui tale dimostrazione non è ancora stata conseguita, come quelli del "Grande teorema di Fermat" oppure della funzione "zeta di Riemann”. Altri che richiesero la maturazione di almeno una generazione o due di matematici perché fossero compresi appieno, come quelli di Evaristo Galois, ed altri dovuti a Poincaré.

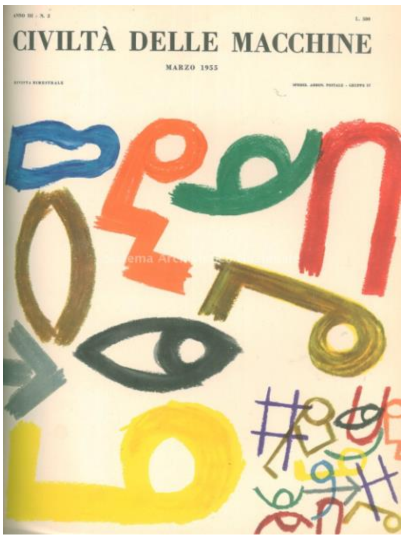
Ma anche quando la dimostrazione è stata conseguita o meglio conquistata dallo stesso scopritore della verità, ciò richiede un'invenzione, che è un lavoro essenzialmente creativo. A volte si tratta di inventare un nuovo simbolo, un nuovo algoritmo, un nuovo modo di presentare le cose vecchie e note, che porta a risultati non prima sognati.

Ed a questo proposito posso osservare qui che i matematici valenti dei quali ho notizia personalmente sono dei soggetti che dimostrano una grande originalità in tutto, non soltanto nella matematica; questo disprezzo delle strade seguite da tutti, questo amore dell'originalità che spesso diventa quasi amore del paradosso, pare essere una delle condizioni del lavoro matematico creativo ed una specie di ferro del mestiere per la professione del matematico. Vi è infine la costruzione di un ambiente - per così dire - nel quale la nuova scoperta possa portare i suoi frutti; anche questo è un passo essenziale per la valorizzazione, passo che dà allo stesso scopritore la coscienza del significato del suo lavoro.

7 - Vorrei terminare qui il mio breve "excursus" attraverso la mentalità del matematico; la discussione potrà chiarire molti punti ed eventualmente mettere a fuoco gli interessi sugli argomenti che più interessano i presenti. Vorrei tuttavia ribadire due punti che in particolare mi stanno a cuore. Anzitutto la matematica non è quella dottrina arcigna che la scuola media ci presenta, fatta di deduzioni rigorose e di formule arcigne ed incomprensibili; la matematica vera e viva richiede lavoro di fantasia e dà dei piaceri intellettuali che sono analoghi a quelli della creazione e della contemplazione artistica; come tale potrebbe addirittura essere classificata come un'arte piuttosto che come una scienza. Comunque sia, la matematica vera, la matematica superiore e viva differisce da quella che si insegna nelle scuole ai soli fini pratici come la pittura differisce dalla pratica dell'imbianchino; la prima è un lavoro creativo che dà soddisfazioni intellettuali anche ai pittori della domenica, che hanno ben scarso talento artistico; la seconda è una qualunque professione materiale che non ha nulla di poetico in sé stessa ed è adibita ai soli fini pratici e prosaici. In secondo luogo vorrei rilevare che questa capacità di "creazione" originale deve sussistere a tutti i livelli: non soltanto a livello dei sommi, ma ogni volta in cui l'applicazione della matematica non è puramente un lavoro di "routine" ma è autentico lavoro originale, vi è creazione e quindi lavoro di fantasia, di divinazione, di valutazione estetica (nel senso più vasto del termine).

Queste cose sono molto difficili da scoprirsi e da giudicarsi negli altri; e l'insegnare a sforzarsi di raggiungere questo spirito per lo studio della Matematica costituisce un compito che non è facile; sarò molto grato a chi mi vorrà aiutare a far capire queste cose e soprattutto mi vorrà aiutare nel compimento del mio lavoro.

Leonardo Sinisgalli. ***La fantasia creatrice...***

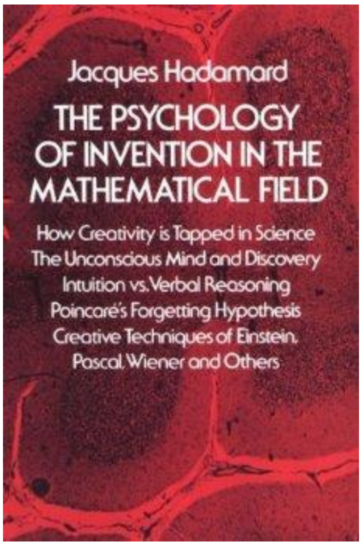


(*) *N. d. R.* Si riporta dal sito
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Hadamard_mathematician.html
…..

Jacques Hadamard's mathematician's mind. In 1945 Princeton University Press published *The psychology of invention in the mathematical field*, by Jacques Hadamard.

J S Joel writes that the work:... *was one of the earliest investigations of the relationship between consciousness and creativity. Hadamard considered the process of invention to progress through several stages, beginning with "preparation", passing through "incubation" to "illumination", and finally reaching "verification". His emphasis on the preparatory stage is at odds with one current theory, which emphasizes the illuminatory one. But it seems that Hadamard's model works very well for mathematics. In this sense the book retains its importance and value for modern psychologists, cognitive scientists, and mathematicians*. We reproduce below the Introduction.

Introduction. Concerning the title of this study, two remarks are useful. We speak of invention: it would be more correct to speak of discovery. The distinction between these two words is well known: discovery concerns a phenomenon, a law, a being which already existed, but had not been perceived. Columbus discovered America: it existed before him; on the contrary, Franklin invented the lightning rod: before him there had never been any lightning rod. Such a distinction has proved less evident than appears at first glance. Torricelli has observed that when one inverts a closed tube on the mercury trough, the mercury ascends to a certain determinate height: this is a discovery; but, in doing this, he has invented the barometer; and there are plenty of examples of scientific results which are just as much discoveries as inventions. Franklin's invention of the lightning rod is hardly different from his discovery of the electric nature of thunder. This is a reason why the aforesaid distinction does not truly concern us; and, as a matter of fact, psychological conditions are quite the same for both cases. On the other hand, our title is "Psychology of Invention in the Mathematical Field," and not "Psychology of Mathematical Invention." It may be useful to keep in mind that mathematical invention is but a case of invention in general, a process which can take place in several domains, whether it be in science, literature, in art or also technology. Modern philosophers even say more. They have perceived that intelligence is perpetual and constant invention, that life is perpetual invention. As Ribot says, "Invention in Fine Arts or Sciences is but a special case. In practical life, in mechanical, military, industrial, commercial inventions, in religious, social, political institutions, the human mind has spent and used as much imagination as anywhere else"; and Bergson, with a still higher and more general intuition, states: The inventive effort which is found in all domains of life by the creation of new species has found in mankind alone the means of continuing itself by individuals on whom has been bestowed, along with intelligence, the faculty of initiative, independence and liberty. Such an audacious comparison has its analogue in Metschnikoff, who observes, at the end of his book on phagocytosis, that, in the human species, the fight against microbes is the work not only of phagocytes, but also of the brain, by creating bacteriology. One cannot say that various kinds of invention proceed exactly in the same way. As the psychologist Souriau has noticed, there is, between the artistic domain and the scientific one, the difference that art enjoys a greater freedom, since the artist is governed only by his own fantasy, so that works of art are truly inventions. Beethoven's symphonies and even Racine's tragedies are inventions. The scientist behaves quite otherwise and his work properly concerns discoveries. As my master, Hermite, told me: "We are rather servants than masters in Mathematics." Although the truth is not yet known to us, it pre-exists and inescapably imposes on us the path we must follow under penalty of going astray. This does not preclude many analogies between these two activities, as we shall have occasion to observe. These analogies appeared when, in 1937, at the Centre de Synthèse in Paris, a series of lectures was delivered on invention of various kinds, with the help of the great Genevese psychologist, Claparède. A whole week was devoted to the various kinds of invention, with one session for mathematics. Especially, invention in experimental sciences was treated by Louis de Broglie and Bauer, poetical invention by Paul Valéry.



The comparison between the circumstances of invention in these various fields may prove very fruitful. It is all the more useful, perhaps, to deal with a special case such as the mathematical one, which I shall discuss, since it is the one I know best. Results in one sphere (and we shall see that important achievements have been reached in that field, thanks to a masterly lecture of Henri Poincaré) may always be helpful in order to understand what happens in other ones.

JOC/EFR August 2006

Milano, 1993. Ed. Raffaello Cortina.
A cura di B. Sassoli.