Cremona, 1981

Carlo Felice Manara

Eugenio Beltrami. Matematico ed artista.

NOTA. *Vorrei utilizzare la commemorazione che ho fatto di Beltrami a Cremona nel 1982. Vorrei mettere in evidenza il fatto che il B. ha chiuso una disputa plurisecolare sul postulato della parallela ed ha riscoperto l'opera di Girolamo Saccheri.*

Spesso in passato mi è capitato di deplorare il fatto che il contributo apportato dai grandi scienziati e tecnici al progresso dell'umanità non abbia il risalto che merita, e che nelle nostre scuole la storia che si insegna sia quasi esclusivamente la storia politica, cioè quella che ricorda guerre, conquiste, trattati di pace, spartizioni ecc.; ben raramente vien fatta menzione dei grandi del pensiero filosofico e scientifico, personaggi che prepararono 1'ambiente per i cambiamenti politici.

Recentemente la nostra scuola ha recepito anche l'utilità di inquadrare storicamente la scienza e le sue scoperte: si ottiene così, tra l'altro, il risultato di dare un significato umano alla scienza, di render conto della passione di scoperta e di ricerca che ha ispirato i grandi, ma che ha anche diretto l'impegno dei meno grandi. Purtroppo in questo parziale risarcimento di interesse verso gli scienziati da parte del pubblico esiste una specie di gerarchia che porta quasi necessariamente in primo piano le persone che hanno fatto scoperte più direttamente collegate con le utilizzazioni. Così, per esempio, in Italia Marconi è certo più conosciuto di Maxwell; ma noi continuiamo a pensare che l'opera scientifica di Maxwell sia stata molto più vasta e profonda di quella dello scienziato italiano. Tuttavia quest'ultima è universalmente ricordata perché sta alla base di certe applicazioni che noi utilizziamo quotidianamente: radio, televisione, ecc. Analogamente, nel campo della medicina, la cronaca quotidiana ricorda con grandi clamori i chirurghi che compiono ardite operazioni di trapianto; ma dimentica di dire che queste porterebbero a morte sicura se non vi fossero le lunghe, pazienti ed intelligentissime ricerche sulla compatibilità e sui meccanismi cellulari, enzimatici ed ormonali che portano l'organismo ad accettare oppure a rifiutare certi elementi estranei trapiantati. Senza questi studi pazienti e profondi l'opera del chirurgo, celebrato e portato sugli altari, porterebbe il paziente a morte sicura, a brevissima scadenza, come avvenne nei secoli scorsi per le trasfusioni di sangue e per i trapianti che furono tentati.

Per ritornare all'ambito della fisica e della tecnica, vorrei ricordare che le scoperte di molti fisici non avrebbero potuto trovare mezzi di espressione né possibilità di sviluppo teorico e pratico in assenza di un pensiero matematico che le ha precedute e che ha fornito i mezzi per la formulazione delle ipotesi e per gli sviluppi teorici successivi. Ritornando al campo della fisica matematica, l'atteggiamento di cui abbiamo detto spesso mette nell'ombra l'apporto di scienziati di primissimo piano, la cui opera è fondamentale per gli sviluppi ulteriori della scienza e della tecnica. Ci pare che una delle personalità di questo tipo sia quella di Eugenio Beltrami, il cui pensiero fu fondamentale per gli sviluppi della fisica successiva. Ma forse il fatto che egli fu prevalentemente un matematico nocque e nuoce alla sua fama, che a nostro parere dovrebbe essere pienamente meritata e superiore a quella che egli ha attualmente presso i profani.

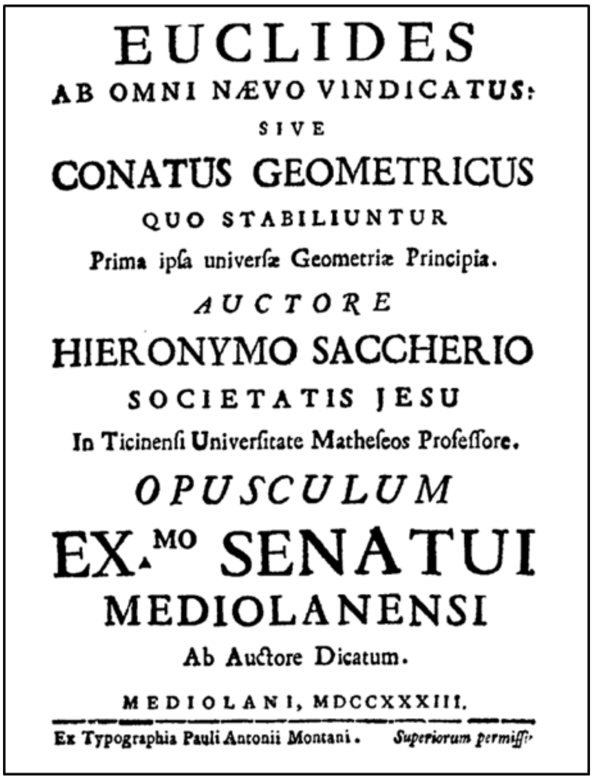
Già la vita del Nostro dimostra che egli ebbe una personalità spiccata, anche nel campo umanistico. Egli nacque a Cremona, nel 1835; il padre, Eugenio, era valente miniatore, e figlio a sua volta di un Giovanni, valentissimo incisore di pietre dure; la madre, Elisa Barozzi, era discendente da antica famiglia veneziana, e donna di altissima sensibilità e cultura musicale. Questi ascendenti spiegano in parte l'altissimo livello della intelligenza di Beltrami, la sua originalità, la sua ricerca della eleganza dell'espressione scientifica e della perfezione del pensiero. B. si iscrisse all'Università di Pavia, dove compì una parte del corso di studi, che dovette tuttavia abbandonare per dolorose vicende di famiglia. Lasciò l'impiego presso le Ferrovie nel 1859, per consiglio di Francesco Brioschi, egli pure matematico di valore, e riprese gli studi, che compì brillantemente. La sua produzione giovanile gli valse nel 1861 la cattedra di algebra e geometria analitica presso l'Università di Bologna. Da Bologna il Beltrami passò a Pisa, e poi di nuovo ritornò a Bologna nel 1866, sulla cattedra di meccanica razionale. Nel 1873 passò a Roma e poi nel 1876 si trasferì a Pavia, sulla cattedra di fisica matematica e meccanica superiore; a Pavia rimase quindici anni, finché ritornò nel 1891 a Roma, dove morì nel febbraio del 1900.

Non entra nelle nostre intenzioni dare qui un resoconto completo dell'opera scientifica di Beltrami, e ci limiteremo a ricordare i suoi apporti essenziali alla fisica matematica; ricordiamo che, all'epoca di cui ci stiamo occupando, e precisamente nel periodo a cavallo tra la fine del secolo XIX e l'inizio del nostro, non esistevano ancora nelle nostre università gli insegnamenti di fisica teorica; quindi la fisica matematica costituiva un campo di ricerche a quell'epoca avanzatissime: si trattava infatti delle teorie matematiche che traevano occasione dalle scoperte della fisica e dalle nuove branche di questa scienza che andavano costituendosi (teoria del calore, i fenomeni dell'elettricità, elasticità ecc.) per estendere la portata dei capitoli classici della matematica tradizionale e addirittura per costruirne di nuovi. In questo campo la matematica italiana ha dato molti rappresentanti di primissimo piano: ci limitiamo a fare i nomi di Vito Volterra, e di quel Tullio Levi-Civita che fornì ad Albert Einstein gli strumenti teorici e simbolici per formulare la sua teoria della relatività generale. In tutti i campi dei quali Beltrami si è occupato, lasciando un segno importante delle sue ricerche, ha sempre dimostrato una particolare vivezza di fantasia creatrice, ed una grandissima eleganza di esposizione. Sono queste alcune doti che fanno il grande matematico, e che accostano spesso la ricerca e la creazione matematica alla creazione artistica; e Beltrami dimostrò, nella ricerca scientifica, di essere un degno erede di generazioni di artisti che avevano fatto della originalità e della creazione lo scopo e l'impegno della loro vita. È forse bene ricordare questi fatti e questi accostamenti della matematica all'arte, perché spesso i profani non sanno o mostrano di non accorgersi di quanta originalità e temperamento artistico siano necessari per fare della buona matematica; ed analogamente le persone non esperte non capiscono che la dimostrazione di un teorema matematico può essere, come si suol dire, "elegante", e può dare delle emozioni che sono accostabili soltanto a quelle della più alta contemplazione artistica. Perché il concetto di "eleganza", anche nel caso della matematica, rende l'idea della profondità del pensiero e della semplicità dei mezzi, della limitatezza della espressione, della vastità della contemplazione.

Come abbiamo detto, non possiamo addentrarci nella descrizione dei particolari della produzione scientifica di Beltrami, ma dobbiamo limitarci ad illustrare un solo episodio della sua produzione, perché esso ci pare di importanza eccezionale: si tratta del lavoro con il quale egli chiuse una vicenda plurisecolare, che aveva attirato l'attenzione dei matematici per varie generazioni. Il lavoro fu scritto nel 1868, comparve nel Giornale di Matematiche (Vol. VI \ 1868), pp.284-312) e porta il titolo " Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea".

Per comprendere l'importanza dei risultati di Beltrami, dobbiamo richiamare brevemente la vicenda scientifica che viene spesso richiamata con espressioni del tipo "La questione del postulato della parallela". È noto che nel monumentale trattato di Euclide, intitolato "Elementi", il grande geometra greco enuncia senza dimostrazione una proposizione che sostanzialmente viene ad affermare che, dati che siano una retta *r* ed un punto *P* fuori di *r*, nel piano che contiene *r* e *P* esiste una sola retta che passa per *P* ed è parallela alla *r*. Come abbiamo detto, Euclide enuncia questa proposizione in forma diversa da quella che abbiamo presentato, ma sostanzialmente equivalente, e la chiama "postulato"; si direbbe che egli non voglia imporla, ma semplicemente richieda l'assenso del lettore o dell'ascoltatore su di essa. Tale proposizione è chiamata spesso anche “Postulato di Euclide" quasi per antonomasia, oppure come abbiamo anche già detto "Postulato della parallela". Si può dire che incominciò con la geometria greca una lunga vicenda, ed una lunga serie di tentativi diretti a dimostrare questa proposizione, cioè a toglierle la sua qualità di postulato, cioè di proposizione non dimostrata, ed a darle la qualità di teorema, cioè di proposizione dimostrata. Diversi matematici che tentarono di dimostrare questa proposizione riuscirono nell'impresa perché in modo più o meno palese e conscio, sostituirono alla proposizione stessa qualche altra proposizione che essi consideravano più "evidente" di quella euclidea.

La storia ricorda anche una lunga sequela di paralogismi e di errori, più o meno intelligibili, che furono presentati come pretesa dimostrazione. Tra i tentativi più intelligenti uno tra i più originali è quello effettuato dal Padre gesuita Girolamo Saccheri; questi fu professore all'università di Pavia, e nel 1753 scrisse un trattatello intitolato "Euclide ab omni naevo vindicatus": Euclide emendato da ogni neo; Saccheri seguì·una strada del tutto nuova rispetto a quelle battute dai suoi predecessori, e precisamente tentò una dimostrazione per assurdo della proposizione euclidea. Infatti egli enunciò due ipotesi contrarie al postulato di Euclide, e ne trasse diverse conseguenze, fino a giungere a certe proposizioni che egli giudicava assurde, in base a certi ragionamenti che non sono validi, perché non completamente fondati. Ne consegue che il Saccheri passò alla storia non come colui che aveva dimostrato in modo inconfutabile la proposizione euclidea, secondo i suoi desideri, ma come colui che per primo nella storia aveva dimostrato, in modo molto ingegnoso, varie proposizioni di geometria non-euclidea, cioè di una geometria che accetta come punti di partenza delle proposizioni contrarie a quella enunciata da Euclide.

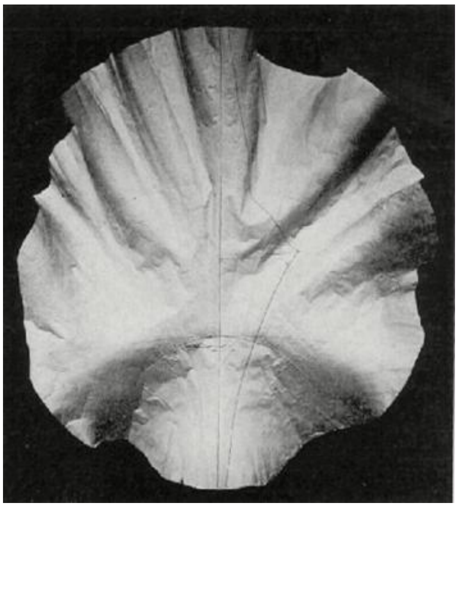

EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

Verso l'inizio del secolo scorso si fece strada l'idea che il postulato euclideo della parallela non fosse dimostrabile, partendo soltanto dagli altri. Ed insieme con questa convinzione si fece anche strada l'altra, cioè che la geometria non avesse il carattere di scienza caratterizzata dai suoi contenuti, come era sempre stata considerata. Questa convinzione richiedeva una notevole fantasia ed un grande coraggio intellettuale: occorreva infatti andare contro alla convinzione comune, radicata da secoli, che la geometria fosse la scienza dello "spazio"; cioè la scienza di un oggetto del quale si osservano le prime proprietà evidenti e si dimostrano poi le altre, meno immediatamente evidenti. Lo stesso grandissimo matematico Carlo Federico Gauss scrisse in una lettera che egli possedeva delle proposizioni di geometria diverse da quelle euclidee, ma che aveva evitato di pubblicarle, "per paura degli strilli dei beoti. "

Tuttavia i tempi andavano maturando e la questione del postulato di Euclide si avviava verso la soluzione; questa apparve più vicina quando due geometri, indipendentemente l'uno dall’atro, costruirono delle geometrie non-euclidee, cioè dei sistemi di dottrina che avevano come punti di partenza delle proposizioni tra cui era anche la negazione di quella di Euclide che abbiamo ricordato; i due geometri di cui parliamo sono Johannes Bolyai de Bolyai e Lobačevskij. I loro sviluppi portarono alla dimostrazione di una serie di teoremi di geometria non euclidea, ed alla costruzione dei primi elementi di una trigonometria collegata con questa dottrina. Per maggiore chiarezza ricordiamo che la trigonometria elementare, che viene studiata ancora nelle nostre scuole medie superiori, è sostanzialmente fondata sulla geometria euclidea classica. Infatti la trigonometria costituisce soltanto la traduzione in formule di alcuni teoremi fondamentali della geometria euclidea, tra gli altri del teorema di Talete e di quello di Pitagora; traduzione che permette calcoli spediti e sicuri, con l'impiego delle formule e con l'utilizzazione di tavole numeriche che sono state calcolate da secoli, in vista della utilizzazione pratica delle nozioni geometriche. In particolare la trigonometria permette di stabilire i legami numerici tra gli elementi - lati ed angoli - di un triangolo, e quindi permette di calcolare gli elementi ignoti di un triangolo quando se ne conoscano altri elementi in numero sufficiente a determinarlo. In geometria non euclidea è possibile stabilire dei legami numerici analoghi a quelli che sussistono in geometria euclidea, legami che tuttavia sono più complicati e richiedono l'intervento di strumenti meno elementari di quelli che servono nel caso euclideo; tuttavia, anche in questo caso, si potrebbe dire che la trigonometria discende necessariamente dalla natura della geometria nella quale operiamo. Così per esempio è noto che sulla sfera vale la cosiddetta trigonometria sferica, che è conosciuta fin dall'epoca di Tolomeo, perché serve all'astronomia e quindi anche alla navigazione; tale trigonometria è ovviamente diversa dalla trigonometria piana elementare, che vale nel piano euclideo, perché l'ambiente in cui si opera, e precisamente la superficie sferica, è essenzialmente diverso dal piano.

La costruzione delle geometrie non-euclidee, e della trigonometria corrispondente, non fu tuttavia sufficiente a dissipare i dubbi che rimanevano nelle menti dei filosofi e dei matematici a proposito di queste dottrine. Infatti non vi si scorgevano delle contraddizioni e delle assurdità palesi, ma rimaneva sempre il sospetto che esse fossero sostanzialmente false. Si sospettava che potessero nascondere delle contraddizioni sotterranee, che avrebbero potuto palesarsi con l'andare del tempo e con la deduzione delle conseguenze, portando così alla rovina di tutte le costruzioni, mostri logici, pure esercitazioni di menti stravaganti. In altre parole si pensava forse di poter rinverdire la procedura di G. Saccheri, che voleva giungere alla dimostrazione della proposizione euclidea attraverso la constatazione clamorosa e solare della falsità delle dottrine che conseguono dalla sua negazione.

L'opera di Beltrami mise fine a questi dubbi ed a queste incertezze con grande semplicità: infatti egli osservò che su una certa superficie, la quale si ottiene, come vedremo, in modo molto semplice, è possibile costruire una trigonometria che corrisponde esattamente a quella che era stata costruita nel piano della geometria non-euclidea dai trattatisti che abbiamo nominato. Per comprendere il ragionamento di Beltrami ricordiamo ciò che abbiamo detto poco fa a proposito della trigonometria: abbiamo infatti osservato che le relazioni tra gli angoli ed i lati di un triangolo sono fondate sulla geometria del piano in cui il triangolo è pensato. La superficie su cui ha lavorato Beltrami si può ottenere, come abbiamo detto, in modo molto semplice, a partire da una curva che viene spesso chiamata "curva d'inseguimento": è la curva che sarebbe descritta da un cane il quale insegue una lepre che corre con la sua stessa velocità lungo un percorso rettilineo, facendo in modo che in ogni istante la tangente alla curva descritta dal cane passi per il punto in cui la lepre si trova. Se, come abbiamo detto, le due velocità sono tra loro uguali, il cane non raggiungerà



mai la lepre; ma si avvicinerà sempre di più alla retta che questa percorre. Facendo ruotare la curva descritta dal cane attorno a questa retta si ottiene una superficie che viene spesso chiamata "pseudosfera". (Vedere Nota 3) Su questa superficie si possono tracciare delle curve che segnano la minima distanza tra due punti, curve che vengono chiamate "geodetiche" della superficie. Pertanto, quando si diano tre punti della superficie, è possibile pensare ad un triangolo i cui lati sono formati dalle geodetiche che congiungono i punti stessi a due a due. Orbene la trigonometria di questi triangoli, cioè l'insieme delle relazioni che legano le lunghezze dei lati e gli angoli, coincide con quella del piano della geometria non-euclidea. In altre parole, la pseudosfera fornisce un "modello" del piano della geometria non-euclidea; nel senso che i triangoli tracciati sulla pseudosfera ubbidiscono alle stesse leggi, verificano le stesse formule, alle quali ubbidiscono i triangoli del piano della geometria non-euclidea.

Si conclude che questa non è contraddittoria e le sue premesse, ed i suoi postulati non possono nascondere alcuna contraddizione nel loro complesso. In altre parole, ed in forma un poco paradossale, si potrebbe dire che la geometria euclidea ha fornito gli strumenti per poter constatare che le geometrie non-euclidee sono valide, ed esenti da contraddizioni; oppure anche si potrebbe aggiungere che la geometria euclidea e quella non-euclidea hanno lo stesso destino: esse infatti sono destinate ad essere insieme valide oppure ad essere confutate insieme.

Si comprende facilmente quale sia la portata rivoluzionaria del lavoro di Beltrami. Infatti da questo discende tutta una nuova concezione della geometria, del tutto diversa da quella che era stata adottata per decine di secoli: da una geometria considerata come la dottrina che studia e scopre le proprietà di certi enti esistenti fuori di noi, si passa via via alla concezione di un insieme di proposizioni la cui validità è garantita soltanto dalla coerenza con le proprie premesse; in altre parole, una dottrina che cerca in se stessa i fondamenti della propria validità. Osserviamo tuttavia che una concezione di questo tipo non autorizza per nulla allo scetticismo di fronte ad ogni scoperta scientifica oppure di fronte a qualunque enunciato basato sulla ragione umana: semplicemente si giunge alla concezione della scienza come di una dottrina che non può pretendere di dire nulla di definitivo, ma che pure fornisce informazioni valide in un certo ordine di approssimazione. Pensiamo che un'immagine abbastanza pertinente sia quella della carta topografica: tutti sappiamo che le informazioni che ci sono fornite da una carta topografica sono errate: infatti è noto che un teorema di geometria afferma la impossibilità di rivestire una superficie come quella della Terra con un piano; tuttavia nessuno rinuncia ad utilizzare le informazioni fornite da una carta topografica, perché esse sono adeguate e quindi utili nell'ambito di un certo ordine di approssimazione, anche se non ci dicono tutta la verità.

Testo reimpaginato, febbraio 2014

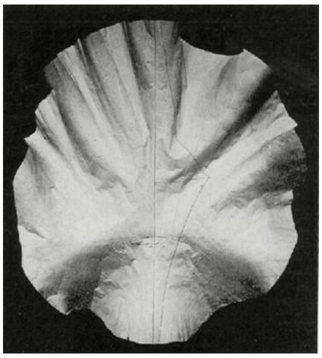
NdR

1 Altri riferimenti storici si possono vedere ad esempio all'indirizzo

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Beltrami.html

2 Riflessioni sul lavoro di Eugenio Beltrami si trovano in altri interventi di Carlo Felice Manara, disponibili nel Sito sella sezione *Divulgazione*. In particolare ricordiamo
(1991) *Epistemologia della matematica*. Dispense per il ciclo di seminari per il Corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica. Università Cattolica. Dipartimento di Matematica. Brescia. Anno Accademico 1991/92.

Riportiamo dalle pagine 28-29 la Nota seguente [6]:



[6] Ricordiamo che il Beltrami costruì anche un modello materiale approssimato di superficie pseudosferica, incollando pazientemente molte strisce di carta opportunamente tagliate. Tale modello si trovava, ancora pochi anni fa, presso l'Istituto matematico dell'Università di Pavia, e credo che vi si trovi tuttora. Esso, quando è ripiegato, assume un aspetto, che giustifica il nome scherzoso di "cuffia della nonna" col quale veniva designato.

[*N.d.R. Si trovano fotografie della cuffia della nonna all'indirizzo*
http://mate.unipv.it/~cornalba/lezioni/beltrami.pdf

3 *Riportiamo qui il testo (che fa parte di un insieme di "Schede" preparate per un progetto (1999) riguardante un Laboratorio di Matematica) proprio sulle Curve di inseguimento*.

SCHEDA2

Curve d'inseguimento e pseudosfera

SCOPO DELLA SCHEDA: *Esporre i problemi delle curve di inseguimento nel piano ed il loro rapporto con la pseudosfera di Beltrami.*

Le curve dette *di inseguimento* sono state studiate da tempo, come esempi tipici di problemi di cinematica. Esse vengono presentate in modo suggestivo parlando appunto di inseguimento di un animale *B* (preda) da parte di un altro animale *A* (predatore), il quale, ad ogni istante della sua corsa, si dirige verso la posizione all'istante stesso occupata dalla preda.

Si intuisce che questa condizione conduce immediatamente a rappresentare ognuno di questi fenomeni con una equazione differenziale. Tuttavia è facile convincersi che le modalità in cui il fenomeno stesso si può presentare possono essere molto diverse: infatti la preda può descrivere una curva di fuga della natura più varia e con diverse velocità; ed il predatore a sua volta può avere le velocità più varie.

Alcuni casi sono tuttavia interessanti per la loro semplicità e per i collegamenti che essi hanno avuto, nel corso della Storia, con importanti problemi riguardanti i fondamenti della geometria.
Presentiamo il caso in cui la preda *B* percorra la retta di equazione $y = 1$ di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico; si suppone che la fuga incominci dal punto di coordinate (1, 1) e l'inseguitore si trovi all'inizio nel punto *A*, di coordinate (0, 0); pertanto all'istante iniziale la distanza tra i due vale $\sqrt{2}$. Si suppone infine che le velocità dei due protagonisti siano tali che la distanza tra essi sia costante, e che ovviamente ad ogni istante la direzione del moto dell'inseguitore sia quella della retta che unisce i due punti *A* e *B*.

Scegliamo di rappresentare la traiettoria del punto *A* (l'inseguitore) in forma parametrica; scegliamo come parametro l'angolo α, che la tangente alla traiettoria, ad ogni istante, forma con l'asse delle *x*; tale angolo decresce dal valore $\pi/4$ a zero. Si ha quindi:

$$(1)\ \pi/4 \geq \alpha > 0.$$

Con questa scelta si ha

$$(2)\ 1 - y = \sqrt{2}\ \sin\alpha,$$

ossia:

$$(2\text{ bis})\ y = 1 - \sqrt{2}\ \sin\alpha,$$

quando α descrive l'intervallo determinato dalle (1). Come è noto, si ha:

$$(3)\ \frac{dy}{dx} = \tan\alpha,$$

e d'altra parte si ha:

$$(4)\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx}.$$

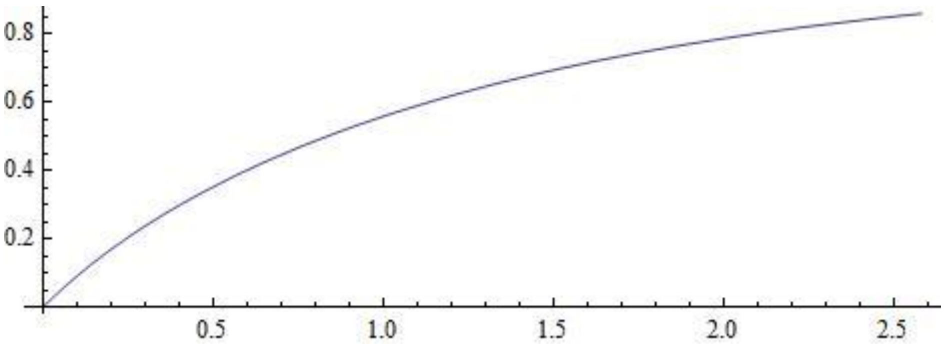
Tenendo conto di (2 bis) e (3) si ottiene, dopo pochi calcoli che non riportiamo ,

$$(5)\ dx = \sqrt{2}\,(\sin\alpha - \frac{1}{\sin\alpha})\,d\alpha.$$

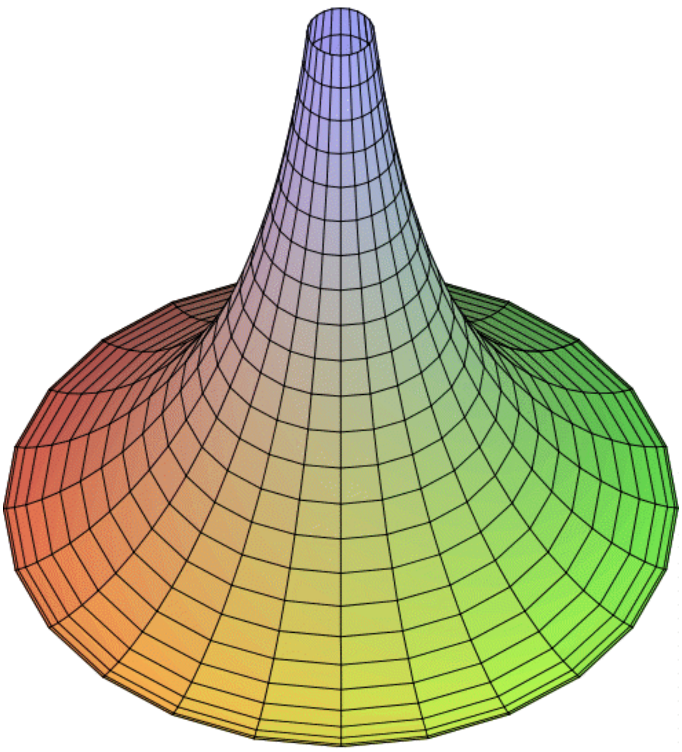
Di qui, integrando e tenendo conto delle condizioni iniziali, si ottiene:

$$(6)\ x = 1 - \sqrt{2}\ \cos\alpha + \sqrt{2}\ (\log\tan\frac{\pi}{8} - \log\tan\frac{\alpha}{2}).$$

Le formule (6) e (2 bis) forniscono la rappresentazione analitica delle coordinate della curva, in funzione del parametro α che descrive decrescendo l'intervallo determinato dalle relazioni (1).



La curva ha come asintoto la retta di equazione y = 1. Facendo ruotare nello spazio questa curva attorno all'asintoto si ottiene una superficie rotonda che si estende all'infinito e, con la sua forma, richiama la parte svasata di una tromba da orchestra; essa ha una proprietà importante: la sua curvatura gaussiana è negativa e costante da punto a punto, e per tale ragione la superficie viene anche chiamata *pseudosfera*. È possibile prendere in considerazione le geodetiche di questa superficie, e di conseguenza anche considerare un triangolo geodetico, ed eseguire il trasporto per parallelismo di un vettore lungo il perimetro del triangolo geodetico. Alla fine della procedura, il vettore trasportato non si sovrappone al vettore di partenza, ma risulta ruotato in senso orario (negativo) rispetto ad esso di un angolo proporzionale alla superficie del triangolo.



Questa superficie è servita al Beltrami per fornire un modello del piano della geometria non-euclidea di Lobačevskij: infatti il Beltrami sviluppò la trigonometria dei triangoli geodetici di questa superficie e constatò che essa coincide con la trigonometria del piano non euclideo iperbolico.

OSSERVAZIONI E PROPOSTE

La realizzazione concreta di una curva d’inseguimento, in modo da permettere una certa interazione, potrebbe essere ottenuta in molti modi: si potrebbe pensare alla preda materializzata con una lucina che si muove di moto rettilineo (oppure anche su un percorso diverso) ed al predatore realizzato con un piccolo robot che segue la luce. In questo caso si potrebbero realizzare vari casi di curva, variando le velocità dei protagonisti (o anche soltanto quella di uno solo di essi) in modo da rendere possibile la cattura della preda oppure la sua fuga, tale da renderla irraggiungibile, perché la sua distanza cresce oltre ogni limite.

In forma molto più economica si può realizzare una situazione materiale, che sia modello di quella descritta matematicamente poco sopra, mediante quello che si potrebbe chiamare un *monopattino schematico* (fig.2). In questo apparecchio la punta *B* descrive la curva di fuga (la retta nel caso trattato) e la rotella posteriore ha il bordo tagliente, quanto basta per non permettere gli spostamenti laterali, in direzione perpendicolare al piano del disco (quei movimenti che i francesi chiamano di *dérapage*): chiamando *A* il punto di contatto della rotella col piano, si ha chiaramente che, quando *B* si muove, *A* descrive una curva d’inseguimento; e precisamente il caso particolare di tale curva in cui la distanza tra la preda ed il predatore rimane costante.

Questo dispositivo realizza quindi uno dei più semplici esempi di sistemi di punti con legami *anolonomi*, cioè legami di sola mobilità e non di movimento: come avviene per l’automobile, il sistema, nel piano infinito, può essere portato in una posizione qualunque *ma non con una traiettoria qualunque.*