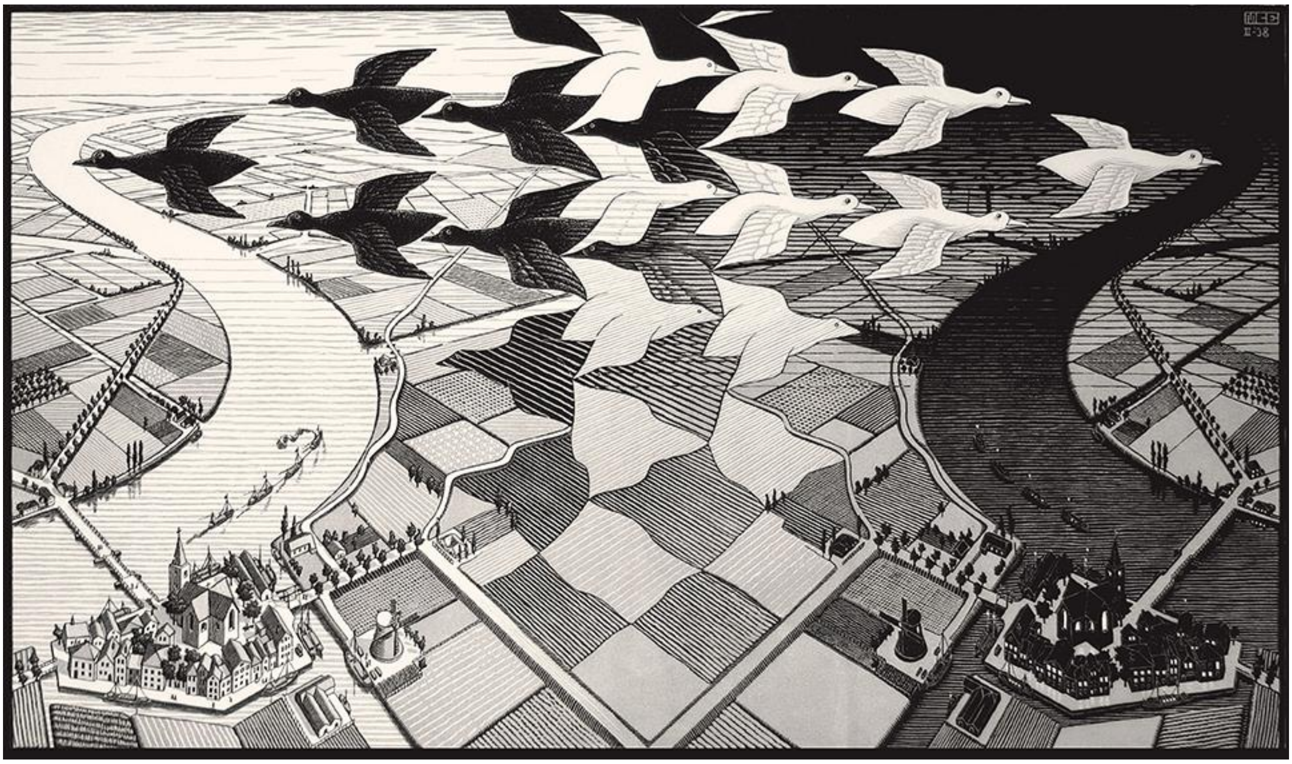

M.C.Escher.Giorno e notte, silografia, 1938. Collezione F.Giudiceandrea

C. F. Manara. Tremezzo 1971 (?). Conferenza.

PROBLEMI EPISTEMOLOGICI DELLA MATEMATICA DI OGGI.

1 - È ben noto che oggi si fa un gran parlare della cosiddetta "Matematica moderna"; l'espressione è stata perfino adottata dal Ministero della P.I. nei programmi di certi corsi integrativi dell'Istituto magistrale, e non posso negare che tale espressione abbia aggiunto confusione a quella già esistente, che non era poca.

Da parte mia, preferirei piuttosto parlare di "visione moderna della Matematica", perché questa scienza rimane sempre la stessa, anche se appare sottoposta a ventate di "mode". Tuttavia va detto che la visione che ne abbiamo oggi è molto più ampia e profonda di quella che se ne aveva anche solo qualche decennio fa.

Potrebbe apparire sconcertante per qualcuno il parlare di problemi epistemologici della Matematica, perché nella mente di molti uomini colti, ed anche di molti utilizzatori tecnicamente avanzati della Matematica, essa si presenta come il modello di una scienza per così dire stabile. E quando parlo di stabilità non mi riferisco ai contenuti, che progrediscono continuamente, ma agli schemi ed ai quadri metodologici. Tuttavia, quando si considerino le cose più davvicino, questo quadro manifesta tutta la sua approssimatività e la sua vanità. Infatti è lecito pensare che la Matematica di oggi non è più quella di un secolo fa, e ciò non soltanto per l'esistenza di mezzi di calcolo e di concrete possibilità di risolvere problemi una volta inabbordabili, ma soprattutto per il tipo di discorso metodologico e per l'impostazione generale che oggi viene data alla Matematica e per le conseguenze che da queste differenze di impostazione generale derivano anche alle applicazioni di questa scienza.

È mia intenzione quindi fare qui una breve analisi della situazione epistemologica della Matematica quale si presenta allo studioso di oggi, per poter parlare poi in seguito delle conseguenze che da questa situazione si possono trarre. Come vedremo, le conseguenze appartengono ai campi più svariati, di modo che si potrebbe dire con una certa presunzione di verità, che la Matematica si presenta oggi in certo senso lo schema ideale della scienza.

2 - Per poter raggiungere lo scopo che abbiamo in mente vale la pena di fare una breve esposizione storica della evoluzione della Matematica nell'ultimo secolo, perché l'analisi storica potrà darci le ragioni che fondano l'atteggiamento attuale della Matematica. Se non si conoscono queste ragioni infatti l'impostazione moderna può venire facilmente tacciata di estrema astrattezza oppure considerata come una inutile ricerca di complicazione. Sarebbe in altre parole giustificato l'atteggiamento di certi studenti i quali, recentemente, hanno scritto vistosi cartelli dicendo che "… I professori fanno il mestiere di rendere complicate le cose semplici". È questo un atteggiamento che sarebbe scusabile a livello di "Scuola di Barbiana" e di "Lettera alla professoressa". Ma a livello universitario ovviamente un atteggiamento cosiffatto si spiega più difficilmente, se non facendo ricorso ad una sostanziale mancanza di intelligenza di chi lo prende o lo accetta. Sta di fatto che le cose non vengono "fatte" complicate, ma lo sono per natura loro; e la illusione di poter rendere le cose semplici e chiare per tutti si dimostra ben facilmente caduca e inutile.

Per riprendere il nostro discorso, potremmo dire che la situazione della Matematica moderna è conseguenza di una crisi di crescenza e di critica che ha avuto le sue origini nella Matematica del Secolo XIX. In quell'epoca abbiamo assistito infatti alla maturazione di una analisi che, partendo da quello che poteva essere considerato come il supremo fastigio dell'edificio matematico, cioè il calcolo infinitesimale, giunse fino a corrodere le radici stesse della scienza, cioè l'aritmetica elementare ed il concetto stesso di numero.

La crisi della Matematica è passata sostanzialmente attraverso la crisi di una sua branca, la Geometria. Infatti non bisogna dimenticare che proprio nella seconda metà dell'Ottocento si ebbe quella radicale crisi che fu generata dalla dimostrazione della compatibilità logica delle Geometrie non-euclidee. Questa dimostrazione costrinse i matematici ad abbandonare la concezione classica della Geometria come scienza che ha certi "contenuti", per ricercare e adottare una visione del tutto diversa: quella della Geometria come sistema ipotetico-deduttivo, un sistema cioè nel quale le proposizioni iniziali sono chiamate ancora per comodità "assiomi", ma non pretendono tuttavia di rendere in modo assolutamente inconfutabile la realtà che ci circonda, in base ad una evidenza di osservazione che non esiste, ma vengono accettati semplicemente come ipotesi di tutta una trattazione successiva, la quale si regge non sull'evidenza dei contenuti, ma sulla coerenza logica delle deduzioni.

È facile prevedere che un atteggiamento cosiffatto, che non si poteva non adottare, come risultato di una critica non ignorabile, portava come conseguenza una quantità di problemi epistemologici, che ancora oggi non sono risolti e che anzi si potrebbe dire costituiscono il nerbo della problematica matematica attuale. E la cosa più interessante è che tale problematica non è senza conseguenza nelle applicazioni della Matematica, ma si intreccia con queste, così come è caratteristica di tutte le scienze modernamente intese, per le quali ben difficilmente si potrebbe tracciare un confine tra ricerca pura e tecnica, tra astrazione e applicazione.

Come vedremo, le più moderne applicazioni della Matematica, all'automazione, alla traduzione, alla gestione di sistemi fisici, risentono in modo essenziale dell'impostazione che alla Matematica viene data dalla visione moderna di questa scienza. Ho detto che vedremo in seguito questo aspetto della Matematica: qui mi voglio limitare ad affermare ed a ribadire che la Matematica è una scienza, e a mettere in guardia gli ascoltatori dal modo di pensare che vorrebbe farne soltanto un coacervo di tautologie, di deduzioni astratte e prive di presa sulla realtà.

In verità potrebbe essere anche una tentazione allettante quella di pensare che la Matematica sia un certo senso inutile per il pensiero puro, perché tutto ciò che si dice è già contenuto nelle premesse. Secondo questo atteggiamento quindi tutti gli sviluppi della Matematica sarebbero soltanto degli sviluppi tautologici, nei quali il pensiero umano sarebbe facilmente sostituito da una macchina pensante, abbastanza sofisticata. Tuttavia vorrei dire subito che chi pensa e parla in codesto modo non ha mai vissuto in pratica quella che è la vicenda di una ricerca matematica, ricerca nella quale gli aspetti deduttivi meccanici sono soltanto una piccola parte, mentre la parte principale è tenuta dalla fantasia creatrice, dalla capacità di divinare e di intuire i risultati dall'esperimento (che in questo caso viene ad assumere l'atteggiamento di calcolo di verifica) particolarmente ben scelto. Il dire che la Matematica oggi si riduce ad un coacervo di tautologie, sarebbe come dire che la direzione di una azienda è un'assoluta sinecura perché chi dirige non fa che rimanere seduto e parlare al telefono, mentre i suoi subordinati svolgono tutto il lavoro importante.

3 - Abbiamo detto poco fa che uno degli aspetti più importanti della Matematica moderna, in confronto alla visione classica di questa scienza, è il fatto che la Matematica si presenta oggi, nella sua struttura essenziale, sempre meno come una scienza di contenuti, per tendere a diventare una scienza di strutture e di forme.

Ciò non significa beninteso che i “vecchi" contenuti (per così dire) siano totalmente abbandonati; ma si vuole così indicare il fatto che la Matematica si preoccupa sempre di più dell’analisi dei propri procedimenti e in generale dei procedimenti di ogni tipo di ragionamento umano, e che i vecchi contenuti vengono riguadagnati in una forma molto più generale e nonostante ciò, direi anzi proprio perciò, molto più adatta alle applicazioni.

Volendo spiegare meglio ciò che ho detto e che ha un aspetto un poco paradossale, vorrei presentare un esempio: quello dell’Analisi matematica classica, nei suoi capitoli di Calcolo differenziale e di Calcolo integrale. Questi contenuti sono oggi alla portata di ogni persona colta a livello ingegneristico; ma l’analisi che è stata fatta recentemente di questa dottrina ha portato a concludere che essa ha due basi fondamentali, che dipendono sostanzialmente dalla Topologia e dall'Algebra. Si potrebbe dire, in modo molto approssimato e rudimentale, che l'Analisi matematica classica era sostanzialmente lo studio delle proprietà topologiche del campo reale, fatto con metodi logici ed algebrici. Tale significato hanno per esempio i classici risultati sulle funzioni continue e sulle proprietà delle operazioni di derivazione e di integrazione, che sono le operazioni fondamentali che tutti conosciamo. Non vi è nulla di strano quindi nel fatto che in una visione moderna dell’Analisi matematica, lo studio di questa branca della scienza venga preceduto dallo studio dei fatti topologici e degli strumenti algebrici fondamentali; un’impostazione cosiffatta permette di arrivare ai teoremi classici di Analisi con molta speditezza e facilità e permette di avere una visione molto più globale, motivata ed unitaria delle dottrine classiche.

A titolo di esempio vorremmo qui soltanto ricordare che i teoremi classici, che di solito vengono enunciati senza dimostrazione e che vengono chiamati abitualmente di Weierstrass e di Heine, sono immediate conseguenze della proposizione di Topologia che afferma essere proprietà fondamentale delle corrispondenze continue quella di trasformare un insieme compatto in un altro insieme avente la stessa proprietà. E ciò - si badi - in base ad una definizione di continuità che è molto più semplice e facile di quella classica.

Per voler dare un altro esempio abbastanza significativo vorremmo ricordare che nella visione moderna dell'Algebra questa non è più caratterizzata dagli "oggetti" che studia (numeri interi, razionali, reali, equazioni, ecc.), ma da certe strutture, le quali oggi vengono considerate come l'oggetto principale dello studio; i vecchi contenuti ritornano, ma non in primo piano: semplicemente come "modelli" di queste strutture, cioè enti reali che in certo modo "riempiono" le strutture astratte che sono state studiate prima.

Questa visione delle cose ha portato a quella che comunemente si chiama la "Matematica moderna", quasi che fosse un corpo di dottrina che segue la moda che può avere caratteristiche analoghe a quelle dei generi di lusso. A questo proposito vorrei che mi fosse consentito un excursus di tipo psicologico-pedagogico, il quale tuttavia non è lontano dai nostri scopi come potrebbe apparire a prima vista. Devo ricordare infatti che le analisi psicologiche dovute principalmente alla scuola di Piaget hanno messo in evidenza il fatto che le strutture fondamentali che reggono l'apprendimento e la formazione dei concetti nella mente infantile sono strettamente parallele a certe strutture algebriche e matematiche. Pertanto la presentazione di quelle che sono le strutture fondamentali della Matematica va incontro anche ad una esigenza psicologica radicale, che vorrebbe presentare prima le cose semplici e poi le complicate. Va detto tuttavia che sarebbe opportuno non fare di queste cose un mito, perché può essere anche vero che l'esperienza concreta dalla quale le idee semplici vengono tratte si presenta come una esperienza composita e complicata; il compito principale della scienza è proprio quello di andare alle leggi fondamentali ed alle idee semplici sottostanti.

Con questo si spiegano anche le polemiche per esempio che Galileo faceva con i dotti suoi contemporanei. Effettivamente è vero che la legge di caduta libera dei gravi è molto più semplice della congerie di osservazioni che venivano fatte allora. Ma tale legge prevede che la esperienza venga fatta nel vuoto e venga - per così dire – depurata da tutte le circostanze accessorie che ne mascherano la vera essenza. Era pertanto anche giustificata la polemica dei dotti che contestavano a Galileo il fatto che la "sensata esperienza" ci dice che i corpi più leggeri (piume) cadono più lentamente dei corpi più pesanti (sassi).

Si spiega quindi anche il fatto storico che il progresso della scienza ben raramente è lineare e che le idee veramente semplici, generali e comprensive appaiano spesso dopo tentativi confusi, dopo sistemazioni complicate e confuse di congerie di fatti. Si pensi per esempio alla teoria del "flogisto" che dominò la chimica fino all'epoca di Lavoisier.

Non voglio addentrarmi a fare una filosofia della Storia che potrebbe apparire (e sarebbe di fatto) superficiale e fuori luogo. Vorrei soltanto trarre dalle poche osservazioni che sono state fatte fin qui una conclusione abbastanza importante e che si riattacca all'osservazione fatta poco fa a proposito di Piaget e della sua scuola. Questa osservazione permette di concludere che i progressi attuali della Matematica hanno fatto tramontare quella che pareva essere la figura classica di questa scienza, considerata come scienza "della quantità". A prescindere da ogni analisi critica sul concetto generico di "quantità", vorremmo ricordare che secondo le definizioni classiche, la Matematica si vedeva presentata come scienza della quantità appunto, e veniva poi ulteriormente biforcata in due rami: scienza della quantità discreta (numeri - aritmetica) e scienza della quantità continua (estensione - Geometria). Questa distinzione, che si rifà alla Matematica dei Greci, è fondamento anche di tante critiche che ancora oggi vengono elevate all'utilizzazione della Matematica per lo studio degli oggetti di altre Scienze.

Alcuni critici sprovveduti dicono che la Matematica applicata per esempio all'Economia è "priva di giustezza essenziale" (sa il Cielo che cosa vogliano significare con una espressione cosiffatta); e la ragione è la solita, cioè che le scienze che trattano dell'uomo hanno una materia che non si presta alla quantificazione; quindi la Matematica è inadatta a trattare tali questioni. Questi sprovveduti dimenticano che l'oggetto della Matematica non è soltanto la quantità, ma ogni sistema simbolico, dotato di leggi formali. Il fatto che tradizionalmente questi simboli fossero simboli di numeri o di oggetti della Geometria non toglie affatto la possibilità che si possano studiare anche oggetti che non sono quantificabili. Un esempio di ciò è dato per esempio dallo studio delle relazioni di preferenza di un consumatore: è ben noto che non si può misurare la soddisfazione o la felicità di un individuo umano. Ma ciò non toglie che con adeguate ipotesi si possano rappresentare i comportamenti di soggetti economici e studiarli con i metodi dei formalismi matematici, anche se - beninteso - tali formalismi non sono quelli classici.

Forse per spiegare l'atteggiamento di certi critici dei metodi matematici si potrebbe emettere un'ipotesi, che tuttavia presento senza voler pretendere che sia l'unica ipotesi esplicativa di un cosiffatto fenomeno psicologico. L'ipotesi potrebbe essere espressa con le parole di quell'arguto Autore il quale ha scritto che "La Matematica non ha simboli per le idee confuse," oppure si potrebbe dire in altre parole dicendo che la Matematica non ha simboli per la mozione degli affetti. Effettivamente l'applicazione dello strumento matematico ad una scienza qualunque, per esempio all'Economia, richiede che siano ben precisati gli oggetti di cui si parla e che siano chiaramente enunciate le ipotesi da cui si parte. Tali ipotesi vengono abitualmente chiamate "assiomi", non per la pretesa di imporle con la garanzia di un'evidenza che nasca dai fatti, ma semplicemente per sottolineare due fatti:

a) che esse sono enunciate senza dimostrazione;

b) che ogni conclusione deve essere tratta facendo riferimento ad esse e <u>soltanto</u> ad esse.

L'applicazione del metodo matematico ad una qualunque scienza richiede questo procedimento, tanto rigoroso quanto scomodo. In questo senso si è dato il nome di metodo assiomatico a questo metodo, che costringe a chiarire a se stessi ed agli altri ogni fondamento delle proprie conclusioni, ed in questo senso ho detto poco fa che la Matematica si presenta come il quadro ideale di ogni scienza nel senso moderno del termine. Che se poi vi è chi vuole rinunciare a costruire una scienza moderna per inseguire una "giustezza essenziale" rifiutandone il solo fondamento metodologico, sono fatti suoi.

Del resto mi è accaduto di trovarmi a partecipare a discussioni ad alto livello in una azienda, nella quale alcuni dirigenti si sono ribellati pubblicamente all'introduzione di matematici nello staff direttivo e di calcolatori elettronici nella dotazione dei mezzi della direzione. Le ragioni addotte erano che "…l'esperienza del dirigente gli dà un "fiuto" che nessun calcolatore può sostituire e nessun modello matematico può superare". Forse le verità (che presento pure come ipotesi, senza volerla dimostrare) è che i modelli ed i calcoli presentano molte (talvolta moltissime) ipotesi tra le quali il dirigente poi deve assumersi la responsabilità di scegliere, con la propria insopprimibile esperienza ma anche con la esplicita responsabilità della scelta. Mentre il cosiddetto "fiuto" che aveva imperato fino a quel tempo si riduceva semplicemente alla scelta o alla imposizione di una unica soluzione; la quale, essendo unica, ha sempre avuto per conseguenza la proprietà di massimo, come ben sanno tutti, anche i non esperti di Matematica. Purtroppo un unico numero ha anche la proprietà di essere il minimo del proprio insieme; ma questa seconda considerazione non è stata fatta né dai dirigenti in parola né dai loro subordinati presenti.

4 - Le considerazioni che ho fatto finora dovrebbero servire da introduzione al discorso fondamentale che dovrebbe riguardare la struttura della Matematica nella visione odierna di questa scienza. Seguendo uno schema comune, vorrei dire che l'edificio della Matematica oggi si considera fondato su una piattaforma che è costituita dal grande blocco contenente la logica e la teoria degli insiemi.

A scanso di equivoci voglio precisare subito che quando dico "Logica" intendo questa parola non nel senso idealistico - crociano, ma piuttosto nel senso della logica formale. Ma non rinuncio affatto a dare un senso epistemologico a questo termine, perché ritengo che la trattazione della logica formale abbia portato, almeno nella scienza moderna, a sostanziali progressi nel campo dell'analisi dell'apprendimento e dei processi fondamentali della mente umana ed abbia di conseguenza portato ad un arricchimento anche filosofico delle conoscenze nostre.

Tra parentesi vorrei dire che per la nostra cultura italiana la parentesi idealistica ha rappresentato un periodo di penosa crisi, anche per la situazione politica che si è instaurata allora e dalla quale la filosofia ufficiale del regime ha tratto occasione per imporre certe idee. Non posso dimenticare per esempio il fatto che la concezione crociana della scienza come un coacervo di "pseudoconcetti" ha influito in modo negativo sullo sviluppo della nostra cultura, rinchiudendola in un provincialismo ed in un nazionalismo che ci ha tagliati fuori per venti anni dalle correnti più vive del pensiero internazionale. Forse quell'atteggiamento di cui ho parlato prima, di chi considera la Matematica come un insieme di tautologie, ha anche qualche lontana radice nell'eredità filosofica dell'idealismo italiano degli anni venti e trenta.

Accanto alla Logica ho nominato la teoria degli insiemi; ed su questo vorrei rilevare che tale teoria è ben altro che quelle poche cose che si trovano nelle divulgazioni che corrono nelle mani di tutti. A questo proposito assistiamo ad un fenomeno interessante, che ancora una volta risente del provincialismo della nostra cultura. Voglio dire che, come è noto a tutti, nella Matematica elementare del nostro Paese – per così dire – è scoppiata la malattia della "insiemistica". Accadono scenette gustose, causate dall'insegnante che ha da poco appreso il verbo della "nuova matematica" e, come tutti i neofiti, è entusiasta e magari un poco invadente; dall'altra parte stanno padri di famiglia, che magari hanno fatto studi di Matematica superiore, e si trovano notevolmente imbarazzati nell'aiutare i ragazzi nel fare i compiti (era così semplice con l'algebretta di una volta) e dicono che "quella non è Matematica".

Naturalmente quando sarà passata la febbre acuta dell'insiemistica si saprà apprezzare meglio ciò che questa specie di piccola rivoluzione ha portato: una apertura di idee, soprattutto la prova che non esiste soltanto l'Algebra dei numeri razionali e reali, ma esiste anche l'Algebra di Boole; una prova del fatto che i formalismi della Matematica possono essere variati all'infinito e soprattutto che il formalismo dell'Algebra di Boole dei sottoinsiemi di un insieme può riprodurre in modo molto efficace i procedimenti fondamentali del nostro pensiero e del nostro ragionamento.

Ma naturalmente non si può dire che quella che si fa in questo modo sia la "teoria degli insiemi". Quest'ultima è nata con le ricerche di G. Cantor ed ha aperto delle nuove strade alla Matematica ponendo anche dei problemi logici fondamentali. Basti accennare alle ricerche di G. Frege e di G. Peano sui numeri interi, e poi all'opera di B. Russel sulla logica formale. Da queste ricerche, che risalgono alla fine del Sec. XIX ed all'inizio del successivo, hanno tratto origine anche altri rami della Matematica. Ricordo qui l'intuizionismo ed infine le ricerche di logica che hanno avuto lo sbocco nell'opera di K. Gödel. Come ho già detto, tutte queste ricerche, le quali si presentano a prima vista come delle ricerche di logica pura, hanno provocato un sostanziale progresso nell'analisi del linguaggio e di conseguenza anche nella costruzione di automi, nella cibernetica, nella Matematica applicata più moderna. Sarebbe veramente un'ingenuità il pensare ed il dire che si tratta soltanto di tautologie …

Sulla base della logica e della teoria degli insiemi la Matematica oggi si vede strutturata su due colonne portanti, che ho già nominate: la Topologia da una parte e l'Algebra dall'altra. Vorrei incominciare da quest'ultima, che forse tutti crediamo di conoscere; effettivamente questa convinzione è basata sulla conoscenza di quella che era la vecchia Algebra, che oggi si potrebbe addirittura chiamare Algebra del campo reale o complesso. Invece oggi l'Algebra si occupa non tanto di numeri (come ho già detto), quanto di sistemi formali e di strutture.

Tra i sistemi formali citerò per esempio i monoidi, che hanno fondamentale importanza per lo studio dei linguaggi; i gruppi, che possono essere considerati come la prima struttura fondamentale algebrica che si è presentata nella storia al di fuori della struttura del campo reale; i reticoli, che hanno fondamentale importanza per lo studio delle relazioni e dei sistemi parzialmente ordinati. A questo proposito citerò per esempio il famoso metodo PERT che è sostanzialmente lo studio di un sistema algebrico reticolare. Queste osservazioni dimostrano la validità di ciò che ho detto prima, che cioè difficilmente si potrebbe distinguere, nella scienza. di oggi, tra ricerca pura e ricerca applicata, tra tecnica e scienza stratta. Ritengo che oggi ben poche siano le aziende che non programmino con il PERT le loro imprese, e tuttavia credo di essere nel vero dicendo che forse ben pochi degli utilizzatori sanno di trovarsi a strettissimo contatto con una delle strutture algebriche più astratte e più moderne.

A questo proposito potrei ancora una volta ripetere ciò che ho già detto riguardo la cosiddetta "teoria degli insiemi" introdotta nella scuola italiana di oggi. Si potrebbe dire che un altro sintomo della malattia della "Matematica moderna" nella scuola è la "gruppite", cioè il sintomo che porta i professori ad introdurre a qualunque costo la struttura algebrica di gruppo. Anche qui si tratta di un fenomeno sostanzialmente positivo, data l'ampiezza di applicazioni che questa struttura ammette, anche molto al di là della abituale struttura dei numeri; naturalmente ancora una volta la cosa non dovrebbe essere portata fino a riempire di gruppi l'intero universo di pensiero, così come prima lo si riempiva di numeri. ·

Qualche parola vorrei spendere a proposito della Topologia. È questa una branca della Matematica relativamente recente e che ha preso le sue origini da due tipi di ricerche. Quelle del primo tipo si richiamano sostanzialmente all'analisi matematica classica ed al concetto di continuità. Come è noto questo concetto ci appare come estremamente semplice, se ci richiamiamo alla visione intuitiva, che nasce dalle nostre esperienze; e difatti come semplice è stato quasi sempre trattato dai matematici, fino a che le ricerche di Cantor non hanno messo in luce che la precisazione e la formulazione precisa di questo concetto portava a delle complicazioni logiche e filosofiche grandissime. Si potrebbe dire che una parte della teoria dei numeri transfiniti di Cantor trae la sua origine dall'analisi di un concetto geometrico che a prima vista ci appare tanto chiaro. E d'altra parte è ben noto a tutti coloro i quali utilizzano la Matematica classica che il concetto di continuità sta alla base del calcolo infinitesimale.

Il secondo tipo di ricerche riguarda certi studi che si potrebbero chiamare di "matematica qualitativa" e che si rifanno a problemi di Geometria della deformazione continua. Problemi di questo tipo sussistono nella fisica classica da molto tempo, per esempio per quanto riguarda l'analisi qualitativa dei circuiti e degli allacciamenti, e nella fisica moderna insieme con la Matematica applicata, per quanto riguarda la cosiddetta teoria dei grafi.

Tutti questi problemi hanno dato origine alla Topologia, che oggi è diventata una branca fondamentale della Matematica. Come ho già detto prima, a questa dottrina andrebbero attribuiti moltissimi capitoli dell'Analisi matematica classica, così come su di essa sono fondati moltissimi capitoli dell'analisi funzionale. Questi capitoli affrontano i problemi più ardui della tecnica e della Matematica pura, come per esempio i problemi della elasticità, quelli della meccanica dei continui, ecc.

Ancora una volta ritroviamo lo stretto collegamento tra la Matematica pura ad altissimo livello e la Matematica applicata; ed ancora una volta non voglio mancare di rilevare questo collegamento, perché non voglio mancare di insistere sul concetto della stretta connessione tra il progresso tecnico di un paese e la ricerca scientifica ad altissimo livello, quella che certi politici miopi e certi tecnici di secondo grado qualificano e considerano come inutile, perché non ne vedono le immediate applicazioni.

5 - Vorrei ora condurre verso la conclusione questa mia conversazione accennando alle nuove prospettive che la Matematica ha preso in considerazione, in vista della crescita dei mezzi di calcolo elettronici, che hanno portato anche in questa scienza una specie di terremoto. L'invenzione e l'adozione di tutta una serie di mezzi di calcolo elettronici ha portato alla ribalta ed ha fatto nascere anche una nuova moda; quella della cosiddetta "Matematica finita", cioè lo studio dei procedimenti che, si potrebbe dire, vanno al contrario della strada abitualmente tenuta dalla Analisi matematica classica.

In altre parole, mentre una volta si cercava di utilizzare il calcolo infinitesimale anche in questioni finite, per la comodità di impostazione e per l'ampiezza di mezzi che si possedevano, oggi si tende a rendere finita anche la trattazione infinitesimale classica, trasformando per esempio le equazioni differenziali in equazioni alle differenze finite; infatti è proprio sotto questa forma che tali equazioni vengono impostate e risolte dal calcolatore elettronico.

In tanti casi poi l'esistenza di mezzi di calcolo rapidissimi ha condotto ad una radicale trasformazione del problema tecnico o scientifico che si vuole indagare: per esempio la strada abituale che passa attraverso la scrittura delle equazioni che traducono in simboli grafici un problema e la risoluzione delle equazioni stesse con il calcolo numerico, è stata spesso abbreviata in modo singolarmente originale ricercando direttamente la soluzione del problema attraverso il calcolatore. È questo il fondamento per esempio del cosiddetto "Metodo Montecarlo" per la soluzione dei problemi e di molti metodi di simulazione.

In questo ordine di idee si potrebbe dire che l'invenzione e l'adozione dei calcolatori elettronici ha anche cambiato il nostro concetto di problema matematico e ci ha costretti a rimeditare a fondo sul concetto di soluzione del problema stesso. Si potrebbe dire infatti che nella concezione classica della matematica la soluzione del problema si ottiene da una formula; anzi nell'idea radicata in molte menti, questa è ancora l'unica concezione della soluzione. Tanto è vero che, ancora oggi, anche molti utilizzatori della Matematica distinguono le equazioni differenziali in risolubili e non risolubili, e gli stessi utilizzatori sono molto spesso legati dalla loro concezione e si fermano di fronte a barriere che erano tali nel secolo XVIII e che oggi non lo sono più. Sta di fatto per esempio che la famiglia delle funzioni che erano note qualche decennio fa, e che erano state tabulate a quel tempo, era relativamente molto ristretta; e d'altra parte nella concezione abituale della soluzione di un problema come riduzione ad una formula determinata c'è, a ben guardare, la riduzione della soluzione del problema stesso all'utilizzazione di una famiglia nota di funzioni. Valga per tutte l'esempio della classica formula risolutiva dell'equazione di II grado.

Tale formula, che moltissimi conoscono a memoria dal loro corso di studi di liceo, e che hanno appreso senza capirne minimamente lo scopo, si potrebbe enunciare in parole dicendo che le radici di un'equazione di II grado, quando ci sono, sono calcolabili facendo ricorso a funzioni note, e precisamente a funzioni razionali ed a radici quadrate. Queste ultime sono considerate note: perché tradizionalmente si insegna ad "estrarre la radice quadrata" (l'enunciazione rigorosa dell'operazione non sarebbe quella!!!). Ho il sospetto che alcuni utenti della Matematica utilizzino equazioni alle differenze finite di II ordine e non superiore semplicemente perché pensano che "l'equazione di II grado si sa risolvere e le altre no". Lo stesso si potrebbe dire della fissazione che molti hanno per la trigonometria, oppure della moda che una volta esisteva per ridurre certe formule "calcolabili con i logaritmi". In altre parole si potrebbe dire che molti atteggiamenti della Matematica tradizionale, anche superiore, erano condizionati dal patrimonio di funzioni elementari che erano tabulate e che si conoscevano.

Ne è seguita anche la convinzione, molto diffusa ancora oggi come ho già detto, che un problema matematico sia risolubile quando le sue soluzioni possano essere scritte in formule e che sia risolto quando si conosca la formula. Effettivamente si tratta di una visione ben povera e ristretta della Matematica, perché io penso che un problema matematico del quale si conosca la formula risolutiva non sia più un problema. Molta fatica per tante persone è costituita semplicemente dall'applicazione della formula risolutiva, mentre questo è un compito che ormai si può lasciare alle macchine; ed è ben noto che, quando si trova che un lavoro fino ad allora svolto dall'uomo può essere svolto da una macchina, si è anche dimostrato di conseguenza che l'uomo era sprecato a fare quel lavoro.

Se dovessimo trarre le conseguenze da questo aforisma, dovremmo concludere che molte energie umane e molto tempo vanno sprecati, molti problemi non sono risolti o sono affrontati nel modo sbagliato semplicemente perché non si concepisce nel giusto modo un procedimento matematico.

Io penso infatti che si possa parlare di soluzione di un problema quando si siano trovate delle informazioni in numero superiore a quelle che si avevano all'origine con l'uso di un procedimento razionale. In questi procedimenti razionali l'uso di una formula è soltanto uno tra i tanti che si possono pensare. Ciò comporta che si sia trascritto il problema mediante gli algoritmi della Matematica e che poi ci si sia affidati alle leggi interne del formalismo per trarne la soluzione. Ma niente vieta che il problema sia trascritto nei formalismi interni che sono i circuiti di un calcolatore elettronico e che poi si sia affidati alla logica interna di quei circuiti per trarne le informazioni adeguate. Questi formalismi possono anche comportare un numero grandissimo di estrazioni a sorte e il calcolo delle conseguenti statistiche, così come è comportato dal cosiddetto "metodo Montecarlo". Si tratta ancora una volta di un tipico procedimento razionale, anche se non può essere ridotto al calcolo del valore numerico corrispondente ad una formula.

Ma occorre convincersi del fatto che quando un calcolatore elettronico fornisce un tabulato di una funzione, questa funzione è conosciuta altrettanto che se ne conoscessimo la definizione; e forse è conosciuta meglio, sotto certi aspetti.

6 - Credo che sia giunto il momento di trarre qualche conclusione da ciò che è stato detto fin qui, in modo forzatamente sommario e allusivo. Vorrei anzitutto aver lasciato l'impressione che la Matematica è una scienza viva, che è immersa nel travaglio di ricerca di tutte le altre

scienze e che in certo modo costituisce un nodo centrale di problemi, la cui soluzione è esemplare anche per le altre scienze

Ho già detto che la metodologia assiomatica, intesa nel senso preciso che ho cercato di esporre poco fa, dovrebbe essere la metodologia ideale di tutte le scienze; il fatto che molte scienze, come la fisica, si stiano avvicinando a questo ideale e che altre scienze si stiano muovendo in questa direzione costituisce una confortante conferma di una certa validità di ciò che ho detto. Vorrei tuttavia osservare anche che a mio parere non vi sono scienze che non siano inquadrabili in questa metodologia: la critica, che ho riportato sopra, e che vorrebbe attribuire alle cosiddette scienze dell'uomo una specie di superiorità per il fatto che il loro oggetto non è quantificabile, dimostra soltanto, a mio parere, la scarsa conoscenza dei processi veri della Matematica e delle possibilità che questa ha recentemente acquisito di formalizzazione e di deduzione.

D'altra parte vorrei anche ripetere che i problemi interni di questa scienza sono poi anche i problemi di ogni sapere umano: l'analisi del processo di generalizzazione, lo studio dei procedimenti infiniti, dominati con un numero finito di simboli e di atti di pensiero, costituiscono a mio parere uno sparuto campionario di quelle questioni che interessano la teoria degli insiemi e la logica e che stanno pure alla base di ogni riflessione sulla conoscenza umana.

Non voglio beninteso concludere che tutto è Matematica oppure che dobbiamo affidare a questa scienza la soluzione di tutti i problemi. Ho detto prima che l'utilizzazione dei modelli matematici e dello strumentario dei calcolatori elettronici non limita la libertà di scelta del dirigente aziendale, ma la moltiplica, perché permette di valutare in modo finora imprevisto le implicazioni che sono nascoste nelle ipotesi e di valutare le conseguenze anche remote di certe decisioni; così nel campo delle scienze e della tecnica la Matematica si presenta come un quadro generale metodologico, ma non vuole affatto pretendere di sostituire gli specialisti delle altre scienze e trarre le conclusioni al loro posto.

A questo proposito vorrei a titolo di conclusione ricordare i sorrisi di compatimento che un mio illustre collega riscosse da una certa platea di ascoltatori (erano studiosi di scienze dell'uomo e di scienze sociali, come si dice) quando disse che la Matematica era la più aperta delle scienze. Certo a quella brava gente, che della Matematica aveva dei tristi ricordi e che comunque la pensava come una serie mummificata di formule prive di senso e di utilità, l'affermazione del mio collega appariva alquanto ridicola; ma questa loro ironia era ben poco fondata, perché traeva le sue origini dalla mancata conoscenza della struttura profonda della Matematica. Sarebbe come se qualcuno giudicasse una lingua dai segni del suo alfabeto (magari anche conosciuti male) e dicesse per esempio che il tedesco è una lingua dura e ringhiosa perché i caratteri gotici hanno le punte!!! Eppure molti dei ragionamenti che si sentono fare hanno fondamenti ancora meno solidi e molti giudizi che si sentono esprimere sono ancor meno seri.

Il fatto è che molto spesso l'avversione per la Matematica e per i suoi strumenti trova la sua origine nel rifiuto di uno spirito di rigore e di chiarezza che non è voluta ignoranza della complicazione dei problemi, non è ricerca della semplicità fino al semplicismo, ma è invece sforzo di chiarimento e di analisi. Ciò porta la nostra nazione a fare anche delle bruttissime figure nel campo internazionale e non mi stancherò di ricordare le ironie che ci caddero sul capo quando, tempo fa, ci fu qualche uomo pseudo politico che partecipando a sedute internazionali a proposito dell'alcoolismo si dichiarò sprovvisto di statistiche in proposito, perché nel nostro paese – diceva - la piaga non esiste. Con quale forma di divinazione, in assenza di statistiche, potesse fare un'affermazione di questo genere è un mistero non accessibile a coloro che non appartengono al cielo dei politici. Ma se con risposte di questo tipo si può anche darla a bere ad un'opinione pubblica la quale in sostanza non richiede che di essere mistificata, non si può certo evitare il ridicolo presso le persone di buon senso.

Un fenomeno analogo sta accadendo oggi per il caso della droga: un'opinione pubblica che finora si era adagiata nella comoda immagine di una "sostanziale sanità morale della nostra gente" scopre di colpo che invece il fenomeno ha dimensioni preoccupanti, che rischia di compromettere la nostra gioventù ecc. Forse un poco più di mentalità empiristica e scientifica non farebbe male ad un popolo che crede di essere "di poeti, di santi, di navigatori, di eroi, ecc." e se la diffusione della Matematica a tutti i livelli potrà anche un poco contribuire a questa evoluzione (che richiederà comunque delle generazioni, non facciamoci illusioni), penso che non sarà male.

NdR. *Dattiloscritto rieditato, agosto 2016*