Testo reimpaginato nel gennaio 2014.
Si tratta presumibilmente del testo di una conferenza tenuta da C.F. Manara alla fine degli anni '70, certamente posteriore al 1977.

PEANO

Nell'ordine di idee che ci interessa qui, vorremmo dire che l'opera di Giuseppe Peano costituisce un momento fondamentale del contributo italiano alla questione dei fondamenti della geometria, tanto per il contributo che questo matematico diede direttamente alla questione che per l'influenza che la sua mentalità e la sua personalità hanno esercitato sui ricercatori contemporanei. Nel campo dei fondamenti della geometria vorremmo dire che l'opera di Peano inizia nel 1888, con la pubblicazione del “Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva”. (1) Quest'opera ci pare particolarmente interessante per varie ragioni, che cercheremo di esporre brevemente.

La prima è costituita dal fatto che in essa appare per la prima volta nell'opera di Peano l’utilizzazione della logica formale applicata al ragionamento matematico. È interessante osservare che l’Autore introduce dei simboli che saranno via via modificati nel corso della sua opera successiva, ed introduce delle operazioni di manipolazione dei simboli stessi che costituiscono il primo esempio, nella sua opera, dell'algebra della logica. Il parallelismo con le operazioni algebriche è ripetutamente messo in evidenza e la citazione degli autori che prima di lui si erano occupati di questi problemi dimostra che nel suo spirito l'interesse per la logica era germinato da tempo. Per queste ragioni non esitiamo a ricordare il “Calcolo geometrico” tra le opere che Peano ha dedicato alle questioni riguardanti i fondamenti della matematica; vorremmo ricordare inoltre che nel titolo dell'opera vi è un esplicito riferimento al volume di H. Grassmann intitolato “Ausdehnungslehre”.

È noto che quest'opera ebbe due edizioni: l'una nel 1844 e la seconda nel 1862. Nella prefazione a quest'ultima edizione l'autore lamenta il fatto che le sue idee siano rimaste per un tempo relativamente lungo senza risonanza; pare invece di poter dedurre dal tono del suo scritto e dal resto della sua opera che egli intendeva scrivere un lavoro fondamentale per quanto riguarda i fondamenti della matematica e soprattutto le basi della applicazione della matematica alla scienza della natura, in particolar alla meccanica ed alla fisica. Va rilevato tuttavia che Grassmann non compie un'opera critica fino al fondo della questione dei fondamenti e che nella sua trattazione vari punti fondamentali rimangono nel vago, e soprattutto vari concetti fondamentali sono lasciati alla intuizione ed alla descrizione fatta nel linguaggio comune. Soprattutto manca la distinzione che Peano farà scrupolosamente in seguito tra concetti primitivi e concetti derivati (definiti sulla base di quelli). Tuttavia occorre dire che Grassmann introduce, sotto forma algebrica, l’operazione che oggi si chiama di “prodotto alterno”; il che da una parte costituiva una notevole novità rispetto alla mentalità prevalente nella matematica all'epoca della prima edizione, e d'altra parte permette di risolvere in modo elegante e preciso molti problemi relativi alla geometria delle forze che operano su un corpo rigido ed altri problemi relativi alla intersezione di enti lineari (rette nel piano, rette e piani nello spazio ordinario).

Come abbiamo detto, Peano riconosce esplicitamente, anche nel titolo del trattato, il merito di Grassmann nella ispirazione di questo; va ricordato tuttavia che la trattazione di Peano rimedia in modo egregio alle lacune di cui abbiamo detto della trattazione di Grassmann. Invero non si trovano in Peano quelle disquisizioni tra il filosofico ed il matematico che Grassmann fa a proposito delle “grandezze intensive e delle grandezze estensive”, così come non si trova alcun riferimento al concetto di “movimento continuo”. Anzi, occorre dire che Peano, in un'opera posteriore, criticherà il ricorso che si fa in geometria al movimento continuo di una figura nello spazio, dicendo esplicitamente che questo concetto è di competenza della meccanica razionale, che prende in esplicita considerazione il tempo. Invece di disquisire sul concetto di "grandezza intensiva", Peano attribuisce ad ogni punto un numero reale (relativo), che potrebbe essere considerato, nel caso positivo, come la misura di una massa immaginata concentrata nel punto stesso. Beppo Levi prima e poi Ugo Cassina hanno rilevato il grande progresso costituito dalla posizione di Peano rispetto a quella di Grassmann; soprattutto il primo ha messo in evidenza la chiarezza dell’esposizione di Peano (era questa una delle sue grandissime doti di espositore, a tutti i livelli) rispetto alla oscurità ed alle ambiguità della trattazione di Grassmann.

Nel "Calcolo geometrico" Peano introduce le forme geometriche di prima specie (somme formali di punti a cui vengono applicati del 'pesi'), di seconda e di terza specie, facendo riferimento ai volumi di tetraedri costruiti con un numero opportuno di ulteriori punti arbitrari. In questo modo viene dato un contenuto preciso alle notazioni convenzionali che egli introduce, e viene dato un significato concreto alle manipolazioni ed ai calcoli che egli esegue. Tali calcoli conducono alla introduzione del concetto di “prodotto progressivo” e di “prodotto regressivo”, che saranno utilizzati metodicamente da Cesare Burali Forti nella sua trattatistica riguardante la geometria ed il calcolo vettoriale. Il punto di partenza del calcolo geometrico è quindi il concetto di volume (con segno) di un tetraedro. Lo stesso Peano, in un'opera posteriore, riconoscerà che questo punto di partenza è abbastanza avanzato e non si presta per una analisi rigorosa dei fondamenti della geometria. Resta tuttavia il fatto che per primo Peano ha potuto dare un significato concreto alla notazione del vettore, designato come differenza di due punti, notazione che prima di lui era stata già adottata da Hamilton, ma in senso puramente convenzionale (l’osservazione è di U. Cassina); tale notazione è stata adottata in seguito dalla scuola italiana di meccanica razionale, insieme ad altre che hanno provocato anche discussioni e polemiche su cui per il momento non ci addentriamo.

Come abbiamo già detto, con il Calcolo geometrico vengono introdotti degli strumenti per la trattazione diretta degli enti della geometria; in particolare la operazione di “prodotto regressivo” permette di rappresentare in forma spedita e immediata la operazione di intersezione, almeno per quanto riguarda gli enti lineari. Inoltre dalle convenzioni del calcolo geometrico si risale facilmente a quelle delle coordinate cartesiane o valori, e quindi per questa strada si riconquistano anche le soluzioni di quei problemi che non sono risolubili con eleganza e semplicità con l'uso del solo calcolo peaniano. Si potrebbe osservare che con questo strumento risulta di facile ed elegante trattazione l'insieme di proprietà che si potrebbero chiamare di geometria affine; ed in questo il calcolo peaniano si avvicina al calcolo baricentrico di Möbius; un poco più difficile risulta la trattazione delle proprietà di geometria metrica, che implicano, come minimo, il concetto di perpendicolarità e di distanza. Relativamente più difficile e meno elegante risulta la trattazione dei concetti della geometria proiettiva; invero con queste convenzioni risulta fondamentale la distinzione tra i punti propri (rappresentati da forme di prima specie con peso positivo) e punti impropri, rappresentati da forme di prima specie (vettori) costituiti da coppie di punti di peso opposto e quindi da forme di prima specie di peso complessivo nullo.

Va osservato tuttavia che questa, che si potrebbe considerare come una limitazione della potenza dell'algoritmo proposto da Peano, è nella linea della sua concezione della geometria, in particolare della geometria elementare. Invero nelle sue opere posteriori dedicate all'argomento e di cui parleremo tra breve, egli dichiara, per esempio, che la proposizione "Due rette di un piano hanno sempre un punto in comune" non fa parte delle nostre sensazioni immediate e che neppure Euclide l'aveva enunciata. Egli si attiene quindi alla massima di osservare la realtà e di tradurre in proposizioni semplici le nostre osservazioni elementari.

Nel 1889 Peano pubblica "*I principii di geometria logicamente esposti*"; in questa breve opera egli riprende le idee di M. Pasch, ed assume come idee primitive quelle di "punto" e di "segmento"; mediante queste ed enunciando postulati egli costruisce la geometria di posizione del piano e dello spazio. Alla fine dell'opera Peano dichiara di voler fare una 'Pangeometria' secondo l'espressione di Bolyài e Lobačevskij e quindi di non voler prendere posizione nei riguardi della validità o meno del postulato euclideo della parallela. Comunque egli enuncia una nuova definizione di parallelismo di due rette in un piano, e dà la sua formulazione del postulato di continuità, in relazione stretta con il concetto di insieme convesso di punti che aveva introdotto nel corso della trattazione. È evidente quindi la sua preoccupazione di realizzare il programma di cui abbiamo detto, cioè di considerare la geometria come una razionalizzazione delle nostre esperienze limitate ad una porzione finita di spazio. Su questo concetto, precisamente sulla idea di "porzione limitata di spazio", ritornerà in seguito Beppo Levi, per precisarlo ulteriormente e renderlo rigoroso, dissipando le eventualità di possibili ambiguità discendenti dal fatto di fare appello ad una 'intuizione' e ad una esperienza concreta che non erano state rigorosamente precisate prima di lui.

Nell'opera che riguarda i *Principii di geometria*, Peano utilizza per la formulazione delle proposizioni e per la deduzione le notazioni di logica simbolica, che stava via via elaborando per renderle adatte alla espressione delle proposizioni della matematica. Va rilevato infatti che nello stesso anno Peano pubblica i suoi 'Principi di aritmetica' col titolo latino "Arithmetices principia, nova methodo exposita". In quest'opera, come è noto, Peano enuncia i suoi assiomi dell'aritmetica, che ancora oggi vengono ricordati con il suo nome; ma soprattutto egli adotta sistematicamente le notazioni di logica, per sottrarre l'analisi delle idee fondamentali della matematica alle ambiguità del linguaggio comune e per rendere concreto l'auspicio di Leibnitz, che aveva divinato il tempo in cui le operazioni di deduzione logica fossero ricondotte ad un puro calcolo, cioè ad un puro maneggio di simboli, sottoposto a regole formali ferree, come quelle che reggono il calcolo dei numeri.


I

PRINCIPII DI GEOMETRIA

LOGICAMENTE ESPOSTI

SAGGIO

DI

GIUSEPPE PEANO

Professore nella R. Accademia militare
libero docente nella R. Università di Torino.

TORINO
FRATELLI BOCCA EDITORI
LIBRAI DI S. M. IL RE D'ITALIA

SUCCURSALI

ROMA
Via del Corso, 216-217

FIRENZE
Via Cerretani, 8

DEPOSITI

PALERMO
Università, 12
(N. Carosio)

MESSINA
(Daly)

CATANIA
S. Maria al Ros.°, 23
(N. Carosio)

1889

Digitized by Google

Abbiamo detto che nei Principii di geometria Peano si limita a trattare le proprietà che riguardano la geometria di posizione, e lascia da parte invece tutta la serie di proprietà che riguardano la misura, le relazioni metriche e gli angoli. Questa limitazione della trattazione sarà rilevata in seguito (1892) da Giuseppe Veronese, il quale, nella sua opera sui fondamenti di geometria, non si dimostra molto tenero nei riguardi dell'impiego del formalismo logico che Peano aveva adottato e che stava costruendo, ed avanza il dubbio che tale formalismo sia sufficiente soltanto per esprimere le proprietà che Peano si era limitato a trattare, e richieda invece dei sostanziosi complementi se si vuole applicarlo a tutte le proprietà considerate dalla geometria elementare classica.

Vogliamo ricordare che l'anno 1892 è anche l'anno della polemica tra Peano e Veronese, a proposito del concetto di iperspazio, polemica cui abbiamo altrove dedicato una certa attenzione, (2) e sulla quale dunque non vogliamo qui ritornare; ci limitiamo ad osservare che, sempre a proposito di questa polemica, Peano insiste nella dimostrazione della non esistenza di segmenti infinitesimi in atto, cercando quindi di distruggere le basi su cui si muove la trattazione di Veronese sui principi di geometria.

Vogliamo infine ricordare, di passaggio, che l'opera "Arithmetices principia &c." è scritta in latino. Pertanto già dal 1982 si direbbe che Peano fosse interessato nella ricerca di una lingua scientifica universale; interesse che l'accompagnerà in tutta la sua vita, insieme con l'interesse per la logica che lo ha reso celebre, come iniziatore di una certa corrente di pensiero (in Italia ed anche fuori) e che lo condusse poi ad elaborare il progetto del "Latino sine flexione" o 'interlingua' che egli utilizzerà per esempio nelle edizioni del Formulario Mathematico, che seguono quelle compilate in francese.

II. ARITHMETICA.

§1 +

N_0 vale « numero », et es nomen commune de 0,1,2, etc.
0 » « zero ».
+ » « plus ». Si a es numero, $a+$ indica « numero sequente a ».

Questione, si nos pote defini N_0, significa si nos pote scribe aequalitate de forma

$\text{N}_0 =$ expressione composito per signos noto $\cup \cap - \ldots \iota$,

quod non es facile.

Ergo nos sume tres idea N_0, 0, + ut idea primitivo, per que nos defini omni symbolo de Arithmetica.

Nos determina valore de symbolo non definito N_0, 0, + per systema de propositio primitivo sequente.

* 1. Pp

·0 $\text{N}_0 \,\varepsilon\, \text{Cls}$

·1 $0 \,\varepsilon\, \text{N}_0$

·2 $a \varepsilon \text{N}_0 . \supset . a+ \,\varepsilon\, \text{N}_0$

·3 $s \varepsilon \text{Cls} \,.\, 0 \varepsilon s : a \varepsilon s . \supset_a . a+ \varepsilon s : \supset . \text{N}_0 \supset s$ Induct

·4 $a, b \varepsilon \text{N}_0 \,.\, a+ = b+ . \supset . a = b$

·5 $a \varepsilon \text{N}_0 . \supset . a+ -= 0$

Lege:

·0 N_0 es classe, vel « numero » es nomen commune.
·1 Zero es numero.
·2 Si a es numero, tunc suo successivo es numero.
·3 N_0 es classe minimo, que satisfac ad conditione ·0·1·2;

PREFAZIONE

Quali fra gli enti geometrici si possono definire, e quali occorre assumere senza definizione?

E fra le proprietà, sperimentalmente vere, di questi enti, quali bisogna assumere senza dimostrazione, e quali si possono dedurre in conseguenza?

L'analisi di queste questioni, appartenenti ad un tempo alla Logica e alla Geometria, forma l'oggetto del presente scritto.

Onde non far lavoro vano in queste ricerche, già oggetto di molti studii, bisogna attenerci rigorosamente alle regole: Usare nelle nostre proposizioni solo termini di valore pienamente determinato; ben precisare cosa si intenda per definizione e per dimostrazione.

I termini di cui ci serviamo nelle nostre proposizioni appartengono in parte al linguaggio comune, o alla Logica, in parte alla Geometria. I termini appartenenti alla Logica sono nel linguaggio comune innumerevoli; ma in un mio precedente opuscolo (*) già feci vedere come con un numero

(*) *Arithmetices principia, nova methodo exposita.* Torino 1889.
Lo studio delle principali operazioni di Logica è dovuto a G. Boole (V. ivi). Servendomi degli studii del Boole, e di altri, riuscii pel primo, nell'opuscolo menzionato, ad esporre una teoria usando puramente segni aventi significato determinato, o mediante definizione, o mediante le loro proprietà.

NdR

(1)

http://mathematica.sns.it/media/volumi/138/Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslhere di H. Grassmann_bw.pdf

http://mathematica.sns.it/opere/138/

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PrintHT/Abstract_linear_spaces.html

> …………………………………………………..
>
> ……… The first to give an axiomatic definition of a real linear space was Peano in a book published in Torino in 1888. He credits Leibniz, Möbius's 1827 work, Grassmann's 1844 work and Hamilton's work on quaternions as providing ideas which led him to his formal calculus.
>
> Peano's 1888 book *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* is remarkable. It gives the basic calculus of set operation introducing the modern notation ∩, ∪, ∊ for intersection, union and an element of. It was many years before this notation was to become accepted, in fact Peano's book seems to have had very little influence for many years. It is equally remarkable for containing an almost modern introduction to linear spaces and linear algebra.
>
> In Chapter IX of the book Peano gives axioms for a linear space. It is hard to believe that Peano writes the following in 1888. It could almost come from a 1988 book!..................................
>
> ……………………………………………………………………………………….

(2) C. F. Manara, M. Spoglianti. *La idea di iperspazio. Una dimenticata polemica tra G. Peano, C. Segre e G. Veronese*. Accad. Sci. Modena. Atti Mem. (6), 19 (1977), 109-129.

Si veda anche

C. F. Manara. *Giuseppe Peano e i fondamenti della Geometria*. Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti, Modena. Atti del Convegno "Peano e i fondamenti della matematica", Modena 22 - 24 ottobre 1991. 171- 184.

Documentazione esaustiva in rete si trova all'indirizzo

http://www.peano2008.unito.it/

(Celebrazioni di Giuseppe Peano nel 150° della nascita e nel centenario del Formulario Mathematico).