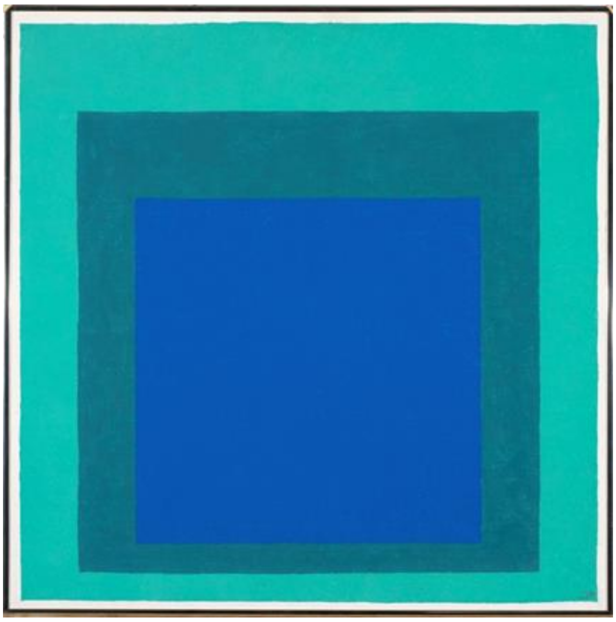


J. Albers. Omaggio al Quadrato (1976)

Milano 2013, Palazzo delle Stelline: J. Albers. Spiritualità e Rigore.
È l'ultimo Omaggio al Quadrato dell'artista, prima della morte.
Dolce color d'orïental zaffiro…. (Purg. I, 13)

L'EVOLUZIONE DELLA GEOMETRIA ED IL SUO SIGNIFICATO GNOSEOLOGICO

(CARLO FELICE MANARA Raccolta di materiali per il corso *Problemi religiosi posti dalla filosofia della scienza*, tenuto per il ciclo di specializzazione della Facoltà Teologica dell'Italia Settentrionale, Milano, negli anni accademici 1976-77, 1977-78, 1978-79)

PARTE TERZA

La matematizzazione della scienza moderna ha un significato fondamentale, come abbiamo visto; e questo significato è collegato strettamente con il concetto che la matematica si fa di se stessa e con l'immagine che essa si dà. È molto interessante seguire nel suo sviluppo storico la evoluzione di questo concetto, perché nella maturazione secolare di questa scienza si comprendono molti aspetti della sua mentalità e correlativamente anche molti aspetti della scienza moderna. Come abbiamo detto più volte, la matematica nel suo assetto classico veniva considerata come costruita da due branche le quali erano considerate a loro volta come due aspetti dell'oggetto specifico della matematica stessa. Questa infatti era in qualche modo specificata dall'oggetto *quantità* e questo *genus* veniva considerato come suddiviso in due *species*: quella della quantità discreta, che conduceva allo studio del numero, cioè all'aritmetica, e quella della quantità continua, che conduceva allo studio della estensione ovvero alla geometria. La suddivisione in due species era un lascito della concezione classica e della impostazione euclidea della matematica, impostazione che era sostanzialmente dovuta all'opera di Euclide ed alla sua opera più classica e conosciuta: i libri degli Elementi.

Sappiamo che esistono storici i quali credono di aver individuato nelle civiltà precedenti dei risultati di matematica molto raffinati. Sta di fatto che esistono documenti che attestano la capacità di quei popoli (Assiri - Babilonesi, forse Sumeri) di risolvere dei problemi molto complicati, che oggi richiedono dei mezzi notevoli. Esistono anche dei documenti che attestano la presenza di tavole di funzioni elementari. È da osservarsi tuttavia, con il Bortolotti, [2], che a volte anche se un problema nella sua completa generalità richiede dei mezzi matematici notevoli, può avvenire che un particolare problema, dato numericamente, possa essere risolto numericamente per tentativi. Per esempio e per fissare le idee, il fatto che esistano delle equazioni di II° grado risolte non prova affatto che certi popoli possedessero la formula di risoluzione della equazione di II° grado in generale; invero i casi particolari che si trovano risolti possono anche condurre alla soluzione per tentativi, come è provato dalla esistenza di tavole di funzioni elementari, che paiono appunto il mezzo più adatto per rendere metodici i tentativi di soluzione numerica.

Pertanto restiamo del parere che nulla prova l'esistenza di metodi generali per la risoluzione di certi problemi matematici, quando i casi particolari risolti che conosciamo attraverso i documenti possono essere risolti anche con mezzi più elementari o meglio artigianali. Questa tesi è in accordo con il principio generale che si potrebbe chiamare del minimo mezzo e che del resto è generalmente applicato nelle ricerche storiche. Pensiamo quindi di poter affermare con una certa tranquillità che gli Elementi di Euclide costituiscono il primo esempio, storico, di un trattato scientifico, nel quale le nozioni sono presentate in modo rigoroso; precisamente sono enunciate certe proposizioni senza dimostrazione e tutte le altre che se ne deducono sono rigorosamente dimostrate. Prima di procedere oltre osserviamo tuttavia che la tesi storica del minimo mezzo, che abbiamo cercato di presentare poco fa, non ha nessuna influenza sulla validità di ciò che diremo, a proposito della immagine che la matematica classica aveva di se stessa ed in particolare del proprio oggetto. Vorremmo piuttosto ribadire la osservazione che per la prima volta nella storia troviamo in Euclide la matematica trattata a quel livello di generalità e di astrattezza che è proprio della conoscenza scientifica; gli altri documenti storici che possediamo danno delle nozioni matematiche che erano episodiche e soprattutto legate a casi ed a problemi particolari.

Ora vale la pena di analizzare almeno un poco la struttura dell'opera di Euclide; e ciò tanto per l'interesse in sé della cosa quanto per il fatto che l'opera di Euclide è stata in certo senso il paradigma dell'opera di matematica almeno fino al Rinascimento. E ciò non significa che i secoli posteriori ad Euclide non abbiano apportato dei progressi in quanto riguarda il contenuto, ma che la impostazione scientifica e gnoseologica del trattato euclideo è rimasta sempre la stessa. In certo senso si potrebbe addirittura dire che la matematica è concepita ancora oggi come la concepiva Euclide, almeno presso le persone che, anche se colte e intelligenti, non hanno avuto occasione di prendere contatto con la matematica superiore e soprattutto con la matematica nel suo momento in cui ricerca e si fa. L'analisi dell'opera di Euclide, e delle glosse che ne vennero fatte anche nell'epoca rinascimentale, porta a concludere che la geometria era considerata presso Euclide come una scienza che ha dei contenuti, e che questi contenuti sono degli oggetti reali sia pure 'sui generis'.

Invero abbiamo detto che il trattato degli Elementi inizia con delle proposizioni che non sono dimostrate; per la verità esso inizia con la presentazione di certi ‘termini’ la cui interpretazione è stata sempre molto controversa. I termini hanno l'aspetto di definizioni; per esempio la prima frase dice ‘Il punto è ciò che non ha parte’; questa frase ha fatto scrivere fiumi di inchiostro (si veda per esempio il Commandino [1]), portando a delle considerazioni che oggi si considerano come prive di ogni senso e di ogni interesse, se non di interesse storico per la loro stranezza; si osserva tuttavia che nelle frasi che Euclide scrive non vi sono elementi che siano poi sfruttati nel seguito per concludere una dimostrazione; per esempio non vi è alcuna dimostrazione che concluda con un procedimento del tipo ‘E questo è vero perché il punto non ha parti, come si deduce dalla sua definizione’. Pertanto queste frasi, che Euclide intitola 'Termini', sono oggi interpretate piuttosto come delle descrizioni o delle presentazioni dei termini utilizzati, piuttosto che come delle definizioni nel senso logico; press’a poco come le frasi che figurano in un dizionario, che non pretendono mai di essere delle definizioni, nel senso della logica, ma piuttosto di precisare qualche significato, di circoscrivere la grammatica logica dell'impiego del termine, di chiarire i suoi rapporti con altri termini.

Sarebbe interessante una analisi delle cause che portano Euclide ad iniziare con la geometria, piuttosto che con la aritmetica. Questo interrogativo ci condurrebbe in una discussione che non abbiamo l'intenzione di approfondire e che sfioriamo qui soltanto per l'interesse che può avere in collegamento con il nostro argomento. Invero si potrebbe pensare che la prevalenza che la civiltà greca scientifica diede alla geometria nei riguardi dell'aritmetica (che in un certo senso potrebbe essere pensata come più radicale e fondamentale) può anche essere ascritta alla mancanza di una convenzione comoda per rappresentare i numeri e le operazioni su di essi. Effettivamente in Euclide troviamo sempre che il numero intero viene rappresentato con riferimento a grandezze geometriche; per es. troviamo che invece di dire che un numero *a* è un divisore di *b* si dice che '*a* misura *b*' nel senso ovvio, dal punto di vista della geometria, che il segmento di lunghezza *a* entra un numero intero di volte (misura, dice Euclide) nel segmento *b*.

Non vogliamo entrare qui nella discussione, che porterebbe lontano, sull’influenza che le convenzioni di rappresentazione dei linguaggi possono avere sulla stessa eventualità di formazione delle idee; ci limitiamo quindi ad osservare la cosa e proseguiamo nella nostra analisi. Questa ci porta in modo naturale a considerare il carattere delle proposizioni che Euclide premette alla sua trattazione, che egli enuncia senza dimostrazione. Tali proposizioni sono di due tipi: alcune che Euclide chiama 'assiomi' e che sembrerebbero enunciare delle verità valide in generale quale che sia la loro specificazione; per esempio si trova un assioma che dice 'Due cose uguali ad una terza sono uguali tra loro'. Qui il termine 'cosa' ha un significato totalmente generale come pure il termine che esprime la relazione 'uguale'. La critica posteriore ha chiaramente enucleato il significato di una relazione cosiffatta, che viene caratterizzata attraverso le sue proprietà formali: riflessiva, simmetrica, transitiva.

Non interessa qui l'analisi ulteriore delle possibili interpretazioni degli assiomi; interessa soltanto il fatto che questi erano concepiti da Euclide (e certamente dai commentatori dell'opera euclidea durante i secoli) come degli enunciati 'veri' nel senso primitivo della parola. Accanto agli assiomi Euclide enuncia anche delle proposizioni che chiama 'postulati', come a dire richieste. Il carattere di queste cinque proposizioni è lievemente diverso da quello degli assiomi; queste proposizioni non pretendono di avere quella generalità e quella assoluta verità che si attribuisce agli assiomi: esse riguardano non le 'cose' in generale, ma soltanto gli oggetti della geometria, costruzioni che si possono fare, relazioni che sussistono. Inoltre è interessante osservare che il nome che viene dato alle proposizioni stesse fa quasi presagire una certa polemica, una possibilità di messa in questione della verità di queste proposizioni; invero si direbbe che esse non vengono enunciate in forma assoluta ma quasi come richieste come se in una discussione l'antagonista richiedesse che queste proposizioni fossero ammesse come vere, impegnandosi poi a farci accettare le altre per forza di logica. Come è noto i cinque postulati che compaiono negli Elementi sono i seguenti (espressi in linguaggio moderno).

Si domanda che

1 - ogni linea retta possa essere prolungata indefinitamente per diritto (qui è da osservarsi che quello che Euclide chiama 'linea retta' è quello che oggi si chiama 'segmento di retta'; di qui la sua necessità di poterlo prolungare in modo indefinito.

2 - Che facendo centro in un punto qualunque si possa tracciare un cerchio con un raggio qualunque.

3 - che tutti gli angoli retti siano tra loro uguali

5 - che se una retta, incontrandone altre due (in un piano) forma con esse due angoli all'interno che hanno somma diversa da due retti, le due rette si incontrino dalla parte in cui la somma degli angoli è minore di due retti.

Il quinto postulato che abbiamo enunciato è il celebre postulato che viene chiamato 'della parallela', o anche semplicemente postulato di Euclide. Invero si arriva presto a dimostrare che, se questo postulato è valido, esiste una sola parallela per un punto ad una retta.

Come abbiamo detto, queste proposizioni appaiono chiaramente come meno generali degli assiomi e certamente riguardano degli enti che sono oggetti della geometria, enunciano la possibilità di certe costruzioni, la sussistenza di certe relazioni geometriche. Tuttavia ci interessa qui un carattere di queste proposizioni, carattere che dà una idea del significato che per tanti secoli è stato dato alla geometria; invero queste proposizioni sono state considerate per secoli come evidenti, nel senso che esse enunciano qualche cosa di vero di qualche contenuto che di volta in volta potrebbe essere quello che viene chiamato lo 'spazio geometrico' oppure le 'figure geometriche' o altre cose.

Questi enti della geometria in tale concezione, hanno bensì una consistenza puramente ideale, perché già Platone osservava che gli oggetti che il geometra considera sono le figure ideali e non quelle che venivano tracciate sulla sabbia. Ma nonostante questa osservazione, che dava tutta la portata e l'importanza della definizione logica, considerata superiore ad ogni esperimento, per quanto riguarda la geometria, la validità delle proposizioni stesse era fatta consistere nella loro 'evidenza'. Evidenza che ovviamente non si sa da quale fonte scaturisca, se non dalla esperienza, che del resto non tratta di figure ideali, ma soltanto di figure reali. Tuttavia, nonostante questa aporia, la validità dei postulati non è mai stata messa in forse, durante i secoli. I tentativi che sono stati fatti riguardavano la dimostrazione del postulato della parallela, che non veniva messo in dubbio nel suo contenuto, ma soltanto nel modo di presentare il contenuto stesso. In altre parole non si mette a in dubbio il fatto enunciato dal postulato: su questo si era sicuri. Si metteva in dubbio la opportunità di enunciare il fatto stesso come un postulato e si cercava quindi di dimostrarlo come un teorema, partendo da postulati che venivano considerati come più 'evidenti'. In altre parole non veniva messo in dubbio né il fatto (postulato della parallela) né il criterio (la evidenza): si metteva soltanto in dubbio il modo di presentazione del fatto.

La ricerca di proposizioni più 'evidenti' che aiutassero a dimostrare il postulato della parallela potrebbe dare origine per conto suo ad una trattazione a parte; ma non interessa qui se non per il carattere che quasi tutte queste trattazioni hanno avuto; il carattere cioè di considerare la geometria come una scienza che ha dei contenuti, i quali vengono osservati quando sono evidenti e vengono dimostrati quando sono un poco più riposti.

Fa eccezione nella storia della geometria il tentativo di dimostrazione del P. Girolamo Saccheri S. J. il quale cercò di dimostrare il postulato per assurdo, cercando cioè di dedurre dalla negazione del postulato delle conseguenze che a suo parere contrastassero i primi quattro postulati. Questo tentativo è notevole da una parte perché dimostra una notevolissima fiducia nella logica, contro ogni evidenza sperimentale; e dall'altra perché introduce per la prima volta nella storia della scienza una successione di proposizioni che partivano da premesse diverse dal postulato euclideo. Quindi per la prima volta si hanno nella storia dei teoremi di geometria non-euclidea, anche se ammessi provvisoriamente e quindi considerati non 'veri' in se stessi e nei riguardi della realtà esteriore.

È questo l'atteggiamento che fu tenuto anche per qualche tempo quando all'inizio del secolo XIX vennero costruite delle geometrie non euclidee; queste geometrie vennero considerate come delle esercitazioni vacue, dei 'mostri', degli edifici non validi, nei quali tuttavia non si vedeva alcuna crepa che li facesse condannare ipso facto. Questo perché si pensava che la sola vera geometria fosse sempre la euclidea; la crisi sopravvenne quando si dimostrò che questi edifici, che fino a quel tempo erano stati considerati come artificiosi e vani, avevano lo stesso diritto dell'edificio venerando della geometria euclidea. E che anzi la geometria euclidea stessa forniva gli elementi e gli strumenti per garantire la compatibilità logica della non-euclidea.

Questa crisi investe chiaramente il significato della geometria in quanto *scienza di qualche cosa*: invero se questo *qualche cosa* esiste fuori di noi non può avere delle proprietà contraddittorie. Ciò sarebbe contrario al principio della intelligibilità del reale, e della coerenza del mondo. Ovviamente questi principi sono ritenuti talmente validi in ogni caso di conoscenza scientifica, che per salvarli (anche inconsciamente) si è preferito cambiare la idea che si aveva della geometria. Si può dire che inizia a questo punto la crisi anche del resto della matematica, perché incomincia a farsi strada l'idea che questa scienza, come la geometria, non è caratterizzata dai suoi contenuti o almeno da quei contenuti che erano considerati come qualificanti in tempi antichi. Nel caso della geometria la soluzione della aporia fu ottenuta distinguendo la geometria che si potrebbe dire astratta, considerata come un sistema ipotetico - deduttivo, distaccato dalla realtà, e la geometria che si potrebbe dire concreta, intesa come una descrizione ed una razionalizzazione delle nostre esperienze spaziali.

Nel caso del sistema ipotetico deduttivo si ha ovviamente che i nomi delle 'cose' di cui si parla non hanno significato in sé; essi traggono il loro significato dal sistema di postulati che si enunciano e quindi dalla definizione implicita che di essi viene data. Si pensi a questo proposito alla frase con cui iniziano i Fondamenti di geometria di D. Hilbert: la prima frase è "*Pensiamo tre insiemi di enti: quelli del primo sistema saranno chiamati punti ed indicati con lettere maiuscole, quelli del secondo insieme saranno chiamati rette ed indicati con lettere minuscole, quelli del terzo insieme saranno chiamati piani ed indicati con lettere greche*". Qui ovviamente, con questo atteggiamento, la definizione degli enti di cui si vuole trattare viene lasciata ai postulati i quali soli danno la definizione implicita non di un solo ente, ma di quello e di tutti gli altri presi insieme con quello. Si verifica insomma ciò che abbiamo descritto altrove ricordando come vengono definiti i pezzi del gioco degli scacchi: la vera definizione è data dalle regole di gioco ed a priori non vi è nessuna costrizione ad adottare certe regole di gioco piuttosto di certe altre.

Naturalmente quando si adotta questo atteggiamento non vi è nulla di strano che una certa figura, chiamata per esempio retta, abbia comportamenti diversi in diverse geometrie. Per esempio sia di lunghezza finita in una e di lunghezza infinita in altre, abbia una sola o due o nessuna parallela; la cosa infatti non dipende dalla figura in se stessa, ma dal sistema di postulati che la definiscono; la figura in sé non rappresenta nulla che appartenga ad un mondo esteriore che possa fondare logicamente le sue proprietà.

Nascono tuttavia qui dei problemi che debbono essere ulteriormente analizzati per poter accettare questo atteggia mento da un punto di vista teorico e pratico. Anzitutto dal punto di vista teorico è chiaro che se non si ammette che le proprietà delle figure della geometria siano fondate da certi enti che esistono fuori di noi e che fondano quindi la coerenza e la non contraddittorietà del sistema di postulati che vengono enunciati, tale coerenza ed incontraddittorietà deve essere garantita in altro modo. Si presenta quindi in questo caso la necessità di analizzare e risolvere il problema della coerenza dei sistemi formali. Di questo problema abbiamo parlato altrove e qui ci limitiamo a ricordare che la sua origine è stata in questa crisi del concetto di geometria.

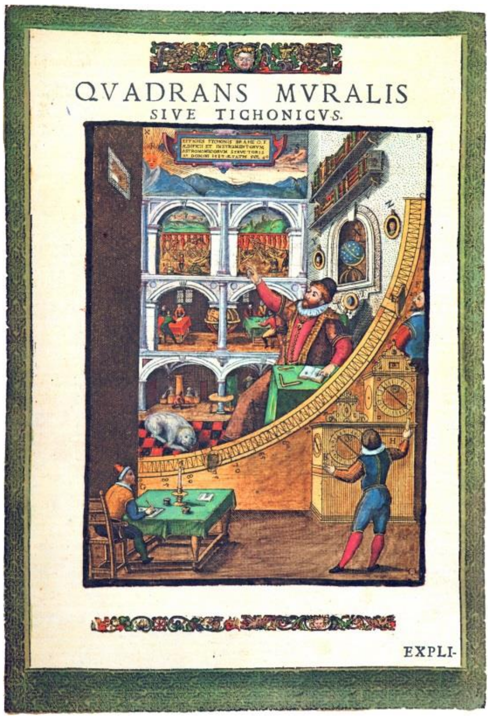
Dal punto di vista della pratica poi si potrebbe porre il problema del significato conoscitivo di una teoria che si chiama geometria ma che non pretende altro che di essere un gioco, le cui proposizioni hanno una validità, nel senso che sono logicamente collegate con le proposizioni iniziali, ma non una verità, nel senso che enunciano qualche cosa di vero di una realtà esteriore che le fonda e che ne fornisce i contenuti; questi a loro volta sono soltanto quelli di un sistema di nomi, i quali sono dei 'flatus vocis', dei 'segna posto' nelle proposizioni che vengono enunciate. A questa stregua quindi la geometria viene ad avere lo stesso significato conoscitivo del gioco degli scacchi o della dama, gioco le cui regole forse una volta erano desunte da situazioni reali, ma che ora non ha più alcun appiglio con una realtà esteriore. In questo problema sta in altre parole il problema del significato della geometria come scienza e dell'oggetto di questa scienza, se mai ne ha uno.

A queste preoccupazioni si potrebbe rispondere cercando di analizzare psicologicamente l'origine dei concetti della geometria ed i bisogni che questa scienza ha soddisfatto nel suo nascere. È forse corretto dire che gli oggetti delle nostre esperienze materiali e concrete non sono le figure della geometria, né lo spazio inteso come un contenente degli oggetti della geometria. Le nostre esperienze hanno come contenuti degli oggetti materiali estesi, e gli oggetti della geometria si ottengono da quegli oggetti materiali estesi con due operazioni: una di elaborazione fantastica e l'altra di concettualizzazione logica.

Per fare un esempio, dalla lastra speculare abbiamo una sensazione che noi elaboriamo fantasticamente fino a dotarla con la immaginazione di due proprietà che la lastra in concreto non possiede: la prima è la continuità, cioè l'assenza assoluta di ogni lacuna (il che nella materia concreta non avviene mai, come sappiamo), la seconda è la estensione senza limiti e frontiere (proprietà che non possiede alcuna superficie piana da noi esperimentata). A questi oggetti della fantasia, elaborati su sensazioni precise, ma non logicamente cogenti, vengono attribuite poi delle proprietà concettualmente formulate con proposizioni. Ora va detto che nulla impedisce che si cerchi di razionalizzare, cioè di unificare, di ridurre a pochi principi, di dedurre da questi della conseguenze, le sensazioni che ci sono date dagli oggetti estesi e che riguardano la mutua posizione, la forma e la dimensione di questi. Ma questa razionalizzazione delle esperienze concrete, pur avendo una portata conoscitiva, è tuttavia dello stesso livello di quelle della fisica. In altri termini si ottiene così una geometria che può essere a buon diritto chiamata 'il primo capitolo della fisica'; non priva di interesse, ovviamente, non sprovvista di valore scientifico, ma che non pretende di avere un valore assoluto o soprattutto di avere una validità che vada al di là di quelle esperienze concrete ed idealizzate e elaborate dalla fantasia che sono state alla radice di tutta la costruzione ideale. In quanto capitolo della fisica (e a buon diritto anche primo capitolo, nel senso che riguarda delle proprietà assolutamente elementari dei corpi estesi che cadono sotto la nostra osservazione), la geometria entra nel ciclo di osservazione, formulazione di ipotesi, deduzione, osservazione che è tipico di ogni scienza e che sottomette la validità delle ipotesi da una parte ad una osservazione che fatalmente non può riguardare tutta la realtà, ma soltanto una parte di essa, e dall'altra fa dipendere la validità della ipotesi emessa dalla congruenza dell'osservazione delle conseguenze dedotte e della realtà osservata in seconda istanza. Abbiamo osservato poco fa che il fatto che la superficie di uno specchio sia vista senza lacune è dovuto soltanto alla incapacità del nostro occhio di vedere certe lunghezze d'onda della luce.

Quindi il concetto di continuo geometrico non ha affatto un valore assoluto, ma è semplicemente un concetto astratto da un elaborato fantastico della realtà sperimentale. Si ottiene quindi uno schema che da una parte si inserisce in una qualsivoglia teoria della geometria astratta, perché riceve la propria definizione dall'insieme dei postulati, e dall'altra tuttavia ha una validità non nulla, ma neppure assoluta, di rendere concettualmente la realtà della osservazione e dell'esperimento. Pertanto la accettazione della geometria come 'primo capitolo della fisica' non significa affatto la rinuncia alla possibilità scientifica di questa scienza e di tutte le conoscenza che essa ci dà; significa la rinuncia alla pretesa che questa sia la 'scienza dello spazio' per riportarla alla più modesta descrizione di 'scienza dei corpi estesi' con speciale riguardo alle proprietà di grandezza, di forma e di mutua posizione dei corpi stessi. Non significa ancora la rinuncia alla osservazione ed alla enunciazione di proposizioni primitive, che si danno senza dimostrazione; ma significa soltanto che queste proposizioni ci sono suggerite e non imposte dalla esperienza, che questa 'evidenza' non vuole affatto essere assoluta e di valore metafisico, ma soltanto è una evidenza del tipo di quella che fonda le proposizioni iniziali della fisica: una esperienza immediata sì, ma che ha i suoi limiti nella capacità di osservazione dei nostri sensi, e dello stesso tipo di quella che ci fa dire che la superficie dello specchio *è* una porzione di piano. Sappiamo che una osservazione più raffinata ci porterebbe a concludere che nella superficie dello specchio vi sono più lacune che pieni ma potremmo rinunciare a dire che la superficie dello specchio è piana, per dire più modestamente che il concetto teorico 'piano euclideo' così come è precisato dagli assiomi della geometria astratta, serve abbastanza bene per rendere molte proprietà della superficie dello specchio, così come viene resa dalla nostra osservazione oculare. Con questo non rinunciamo a fare dei concetti astratti della geometria un supporto alle nostre conoscenze scientifiche; diamo solo alle nostre conoscenze scientifiche la dimensione che esse hanno, dopo la rivoluzione galileiana dalla scienza: conoscenze di carattere quantitativo che portano con sé determinati gradi di approssimazione.

Si noti che le stesse cose possono essere ripetute per tutti i capitoli della fisica nei quali entrano dei concetti geometrici. Così per esempio nella astronomia, dove la famosa legge di Newton ha dominato tanto gli spiriti per secoli con la sua semplicità che è passata come legge universale della materia, tanto che si è cercato di introdurla anche nella elettricità, nel magnetismo ecc. Così è per le leggi di Keplero, che hanno fornito il fondamento per la legge di Newton. È noto che Keplero si serviva di osservazioni (di Tÿcho Brahe, *Ticone*) precedenti alla sua epoca, le quali davano la posizione del pianeta Marte con la approssimazione di 6" (sei secondi d'arco). Con questa approssimazione il tentativo di 'dare' una traiettoria a Marte, cioè di escogitare una figura geometrica che rendesse le posizioni apparenti del pianeta sul cielo, fu perseguito da Keplero per tre anni durante una ricerca appassionata che egli chiama la sua·'guerra con Marte'. Oggi potremmo dire che, se fossero esistiti degli strumenti più potenti, in grado di dare le posizioni del pianeta con migliore approssimazione, forse non esisterebbero le leggi di Keplero, perché sarebbero state messe in evidenza anche le deviazioni dalle traiettorie ellittiche, deviazioni che esistono per ogni pianeta. Pertanto anche le leggi di Keplero hanno un significato di 'prima approssimazione' che viene conservata perché le leggi sono particolarmente semplici ed eleganti; così come viene conservata la legge di caduta dei gravi sulla Terra, che nella realtà della atmosfera non viene seguita da nessun grave che cade.

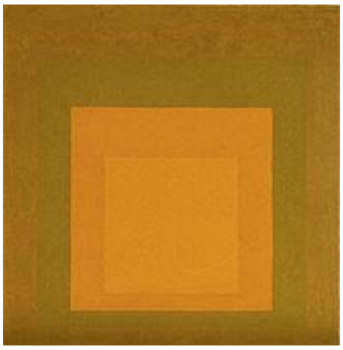


Ticone nel suo osservatorio. Silografia, 1598

A questo punto andrebbe ricordato ciò che abbiamo detto altrove a proposito del concetto di legge, e della deviazione che questo concetto ha subito per opera della matematizzazione della scienza e quindi della incomprensione del concetto di 'forma' metafisica e di sostanza. In una retta concezione metafisica la legge fa parte della natura dell'essere e quindi la specificazione delle leggi che l'essere obbedisce fa parte del problema scientifico di precisare la natura dell'essere stesso. Di conseguenza il fatto che le leggi seguite dai pianeti siano soltanto approssimate significa che noi non conosciamo fino al fondo i personaggi del sistema solare. Il fatto che la visione che privilegia la immaginazione porti a farci immaginare che i pianeti siano delle cose in sé perfettamente conosciute, che correrebbero su traiettorie rettilinee se non fossero stati 'catturati' dal Sole, e che quindi la gravità costituisce una specie di rotaia invisibile che costringe dall'esterno la presunta libertà dei pianeti per costringerli a traiettorie curve, è una visione antropomorfica che potrebbe condurre a storture, come ha condotto effettivamente in molti altri casi. Tuttavia questa maniera di vedere, dominata come si è detto dalla immaginazione, ha ormai preso il sopravvento e domina il modo di concepire le cose nel caso della fisica e non soltanto di questa scienza. Ma vorremmo ribadire che questo modo di vedere e di presentare le cose non è affatto imposto dalla realtà della ragione; è semplicemente una visione che consegue una impostazione puramente meccanicistica del mondo, che ha dato dei frutti ma ha anche portato a notevoli storture mentali nella conoscenza dell'uomo e della società.

Per ritornare alla geometria, si potrebbe dire che nulla del suo valore conoscitivo è perduto, anche nel caso della geometria concreta, purché questa venga posta nel suo posto, che le compete, e non si pretenda che le osservazioni elementari abbiano la dignità di assiomi della metafisica. Anche nel caso della geometria razionale, di quella che abbiamo descritto come 'sistema ipotetico - deduttivo', che non pretende di essere una verità a contatto con il mondo, non vi è nulla di male nel lasciarsi suggerire (non imporre) gli assiomi di partenza da una realtà concreta osservata. Si otterranno così delle deduzioni che potranno essere utilizzate anche nella conoscenza del mondo reale e che, come nel caso della geometria euclidea classica, potranno anche servire in questa conoscenza per prevedere i risultati degli esperimenti e per organizzare le conoscenze che noi già abbiamo.

Come nel caso della astronomia, la conoscenza della leggi di Keplero ci potrà servire moltissimo per descrivere la traiettoria dei pianeti e per prevedere la posizione futura di essi nel cielo con una certa approssimazione. Anzi, occorre dire che la approssimazione può essere determinata; di modo che si potrebbe anche dire che noi sappiamo di enunciare delle leggi 'sbagliate' ma conosciamo anche i limiti e l'entità dello sbaglio che commettiamo; sappiamo dire in altre parole che l'errore che commettiamo non può essere maggiore di tanto e che quindi le informazioni che le leggi ci forniscono hanno questo e questo margine di errore; non sappiamo esattamente quanto sia l'errore, perché questo sarebbe contradditorio, e significherebbe che conosciamo la legge precisa.



J. Albers. Omaggio al quadrato, 1965.

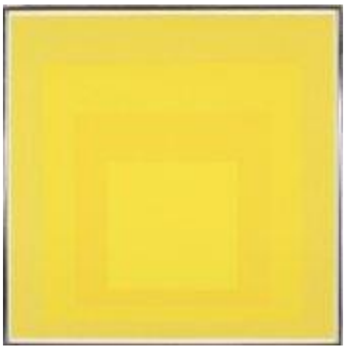
Per ritornare alla geometria da cui abbiamo preso le mosse, non si può dire che con questo nostro atteggiamento nulla sia cambiato nella impostazione e nel significato di questa scienza; anzi addirittura tutto è cambiato dal momento in cui si rinuncia alla evidenza e si rinuncia ad imporre certe proposizioni iniziali mediante la evidenza per lasciarsele soltanto suggerire dalla esperienza. A questo punto infatti nasce il problema logico della compatibilità e della coerenza delle proposizioni iniziali. Invero fino al momento in cui si pensava che le proposizioni iniziali (assiomi o postulati che si vogliano chiamare) rendessero la verità assoluta dello stato di “qualche cosa fuori di noi” (sia questo “qualche cosa” lo spazio geometrico o l'insieme delle figure geometriche o altro), questo “qualche cosa” nella sua realtà era anche responsabile della coerenza della dottrina che si basava sulle osservazioni delle sue proprietà 'evidenti'. Vale invero anche in questo caso il principio implicito della intelligibilità e della coerenza della realtà esteriore; e vale non tanto perché esplicitamente enunciato, ma perché non inizierebbe neppure la ricerca scientifica se questo principio non valesse e la realtà fosse incoerente e inintelligibile.

Ma nel momento in cui la geometria razionale astratta abbandona questo criterio di evidenza, e dichiara che 'sceglie' le proprie proposizioni iniziali, lasciandosele semmai suggerire dalla esperienza ma non imporre da una evidenza che essa rifiuta come criterio (a questo livello, beninteso), allora nasce il problema di garantire in altro modo la stabilità dell'edificio che si sta costruendo e la coerenza delle sue fondamenta. E notiamo bene che questa posizione della geometria non è stata assunta arbitrariamente, con una scelta capricciosa e puramente staccata dalla realtà delle cose; questa posizione è stata presa obbligatoriamente in conseguenza della esistenza di teorie contraddittorie (formalmente) le quali, nella impostazione classica, avrebbero dovuto rendere la stessa realtà effettuale esterna a noi. Questa pretesa contrasta con il principio della intelligibilità e della coerenza della realtà e pertanto si è dovuto rivedere il concetto di realtà sulla quale lavora la geometria, giungendo così alle due concezioni di cui si è parlato.

Si noti di passaggio che anche la geometria astratta non è detto che non lavori su una realtà; ma questa si potrebbe dire è la realtà dei segni, delle simbolizzazioni che abbiamo detto sono dei 'segna posto' nelle proposizioni, non sono delle realtà del mondo esteriore concreto. Resta tuttavia valida la osservazione che anche per queste realtà non è ammessa la incoerenza; non si ammette per esempio che un medesimo simbolo rappresenti due 'realtà' diverse da caso a caso, oppure che si possano enunciare delle proposizioni contraddittorie.

La ragione per cui abbiamo insistito sulla geometria è data dal fatto che questa vicenda è in certo modo emblematica della evoluzione della matematica del sec. XIX e dei problemi che si pongono alla logica ed alla gnoseologia del secolo XX. Infatti dall'ultima frase che abbiamo scritto si evince che il problema logico della non contraddizione sarà in certo modo centrale nella critica dei principi della matematica, che nasce all'inizio del secolo XX con le ricerche di aritmetica. Di questi problemi logici parliamo altrove; qui basti ricordare che anche la soluzione di questi non può ridursi ad un solipsismo che trascende ogni realtà esteriore e che la riduzione ad un numero finito di operazioni e di azioni è stata per vario tempo additata come un criterio fondamentale per evitare ogni critica di non validità delle conclusioni e dei procedimenti matematici, secondo il programma della "Beweistheorie" di Hilbert.

La vicenda della geometria è anche in certo modo esemplare per quanto riguarda il significato della legge fisica nel mondo. In una visione gnoseologica che considerava la legge di Newton come una specie di palladio intoccabile della fisica e quindi ripeteva in certo modo, nei riguardi della legge Newtoniana, quell'atteggiamento acritico che per secoli era stato tenuto nei riguardi della geometria euclidea, il cambiamento di status della geometria non poteva che riflettersi nel cambiamento di status del concetto di legge fisica. Invero si passa dal concetto di verità della legge al concetto di Poincaré di legge *adeguata*; ed in questo concetto di adeguatezza vi è tutta la critica alla concezione classica della legge fisica [3] e l'inizio di una concezione più liberale e criticamente disposta della stessa.



J. Albers. Omaggio al quadrato, 1967

Infine ci siamo soffermati tanto sulla geometria perché una delle teorie più rivoluzionarie (ai suoi tempi) della fisica di oggi, la teoria della relatività, presenta un aspetto essenziale che è quello della geometrizzazione della fisica. Abbiamo analizzato altrove il significato e la portata di questa geometrizzazione, così come la influenza che le idee di Klein hanno avuto sulla ricerca di obbiettività e di intersoggettività che è sempre stata alla base della fisica e che Einstein ha ricercato in modo così originale, sulla scorta della soluzione geometrica che era stata data dalla geometria differenziale. Pertanto si potrebbe dire che non i problemi cambiano nella scienza, ma semplicemente cambiano le tecniche per andare incontro a certe esigenze che appaiono come irrinunciabili ad ogni sapere certo e motivato. Il concetto di certezza che gli antichi modellavano sulla geometria euclidea, considerata come un paradigma di chiarezza, rimane ancora una esigenza fondamentale del sapere umano; soltanto il paradigma non è più lo stesso, ma si potrebbe dire che questo non è male. Invero la certezza di cui la geometria era rivestita non era completamente una certezza razionale, ma spesso si ammantava di una 'evidenza' immaginativa che di razionale ha soltanto l'aspetto esteriore ma non la consistenza logica.

Ritorna come sempre il problema della certezza metafisica che non è fondata sulla certezza scientifica, ma supera questa di tanto di quanto la logica supera la geometria puramente immaginativa. Il fatto che il mondo moderno si accontenti della certezza scientifica (limitata, labile e superficiale) contro la certezza metafisica, non è certo a favore del mondo moderno. Le leggi dell'essere superano e integrano le leggi della scienza, ma uno dei compiti di chi analizza il sapere scientifico è proprio quello di analizzare e delimitare il concetto di certezza e di chiarezza che questo sapere pretende per sé.

1976

Note

[1] Federico Commandino

www-history.mcs.st-andrews.ac.uk

[2] Ad esempio. *Le fonti della matematica moderna - matematica sumerica e matematica babilonese*. Memoria del prof. Ettore Bortolotti letta alla R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna nella sessione del 25 febbraio 1940.

[3] H. Poincaré. *La Science et l'Hypothèse*. Paris, Flammarion (1902)

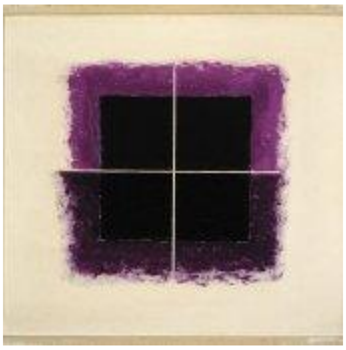
H. Poincaré. *Science et Méthode*. Paris, Flammarion (1908)

H. Poincaré. *La Valeur de la science*, Paris, Flammarion (1905). Tradotto in italiano a cura di G. Polizzi: *Il valore della scienza*, Firenze, La Nuova Italia (1994)

NdR. Si può vedere

Lettera matematica International Edition, Volume 1, Numbers 1-2, June 2013. Special Issue: Henri Poincaré (1854-1912). A Mathematician Between Two Centuries

http://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/40329



J. Albers. White Cross (1937)

Carlo Felice Manara. *Reimpaginato Novembre 2013*