Revue européenne des sciences sociales, Tome XXXIV, 1996, N° 106, pp. 97-106

Claude TRICOT

INCERTITUDE ET DÉCISION
Réflexions sur les origines du calcul des probabilités[1]

On s'accorde généralement pour voir l'origine du calcul des probabilités dans la correspondance échangée entre Pascal, qui habitait Paris, et Fermat, Toulouse, en juillet-août 1654, et, notamment dans les solutions proposées par Pascal et Fermat au problème des parties.

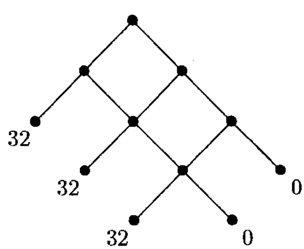
Rappelons succinctement le problème.

Deux joueurs *A* et *B*, font un certain nombre de parties de pile ou face; celui qui, le premier, aura gagné un nombre de parties fixé à l'avance ramassera l'enjeu. *A* et *B* décident de gré à gré d'interrompre le jeu alors qu'aucun d'eux n'a encore gagné le nombre de parties fixé. Comment, dès lors, partager l'enjeu?

J'exposerai les solutions proposées par Pascal et par Fermat, puis je poserai quelques questions, de nature philosophique, qu'à mon avis, ces solutions soulèvent.

Supposons, par exemple, qu'il reste à *A* 2 parties à remporter pour gagner, et 3 à *B*. On peut représenter une partie gagnée par *A* par un vecteur descendant de droite à gauche, et s'il l'a perdue, par un vecteur descendant de gauche à droite.

L'ensemble des parties qui restent à jouer (et qu'ils ne joueront pas) est donc représenté par le schéma suivant:



Supposons l'enjeu de 32 pistoles; la méthode Pascal, que l'on considéra d'abord, est récurrente: on placera la somme qu'on attribuerait à *A* au cours

[1] Conférence Luigi Solari, 1995 et leçon d'adieu, prononcée à l'Université de Genève le 10 novembre 1995.

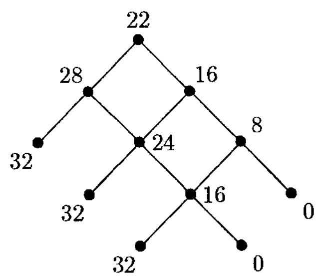
des parties à jouer, aux différents nœuds du graphe ; en cinq nœuds, l'attribution est évidente : A se voit attribuer 32 pistoles s'il gagne et 0 s'il perd.

Si x_{ij} est l'attribution de A, lorsqu'il lui reste i parties à gagner pour avoir 32 pistoles et qu'il en reste j à B, et s'ils jouent une partie, si A gagne cette partie, son gain sera $x_{i-1,j}$ et, s'il perd : $x_{i,j-1}$. On établira une relation entre ces trois termes, de la façon suivante : si $x_{i,j-1} < x_{i-1,j}$, A est sûr de gagner au moins $x_{i,j-1}$ en jouant ; le jeu ne sert donc qu'à partager la différence : $x_{i-1,j} - x_{i,j-1}$. Et comme les chances de gagner ou de perdre une partie sont égales, cette différence sera donc partagée en deux ; ainsi :

$$x_{ij} = \underbrace{x_{i,j-1}}_{\text{élément sûr}} + \underbrace{\frac{x_{i-1,j} - x_{i,j-1}}{2}}_{\text{élément moyen, résultat du jeu}}$$

Au total : $$x_{ij} = \frac{x_{i,j-1} + x_{i-1,j}}{2}$$

Ainsi, à chaque nœud, on attribuera la demi-somme des valeurs attribuées aux nœuds suivants, ce qui permet de remplir le tableau de proche en proche :



En conclusion, s'il reste à A deux parties pour gagner et à B, trois, le partage se fait ainsi : 22 pistoles pour A et 10 pour B.

Que signifie ce 22, en langage actuel ? Soit p_{ij} la probabilité de ramasser l'enjeu, pour A, lorsqu'il lui reste i parties à gagner et qu'il en reste j à B ; si M est l'enjeu, l'espérance de gain de A est Mp_{ij}.

D'autre part, A peut ramasser l'enjeu de deux façons : en gagnant la partie suivante avec la probabilité $^1/_2$, puis en ramassant l'enjeu, avec la probabilité $p_{i-1,j}$; ou encore, en perdant la partie suivante, avec la probabilité $^1/_2$ puis en ramassant l'enjeu avec la probabilité $p_{i,j-1}$. On a donc

$$p_{ij} = \frac{1}{2}p_{i-1,j} + \frac{1}{2}p_{i,j-1}$$

et

$$Mp_{ij} = \frac{Mp_{i-1,j} + Mp_{i,j-1}}{2}$$

C'est la relation de récurrence précédente, avec les mêmes valeurs initiales, évidemment. Donc 22 est l'espérance mathématique du gain de A.

Pascal invente l'espérance mathématique.

Voyons maintenant la solution de Fermat.

Dans l'exemple précédent, il reste aux deux joueurs au plus quatre parties à jouer pour que l'un ou l'autre gagne. On peut donc supposer qu'ils joueront vraiment quatre parties, même si l'un d'eux gagne avant la quatrième partie achevée.

Chacune des suites de quatre parties possibles peut être représentée par une suite de quatre termes, chacun d'eux étant désigné par a ou b suivant que A ou B emporte la partie correspondante ; cela donne 16 suites possibles :

a a a a
b a a a
a b a a
a a b a
a a a b
b b a a
b a b a
b a a b
a b b a
a b a b
a a b b
a b b b
b a b b
b b a b
b b b a
b b b b

Parmi ces suites, 11 contiennent au moins deux fois la lettre a : elles correspondent aux suites gagnantes pour A. Les cinq suivantes contiennent au moins trois fois la lettre b, ce sont les suites gagnantes pour B.

La règle des parties conduit alors à partager l'enjeu proportionnellement à 11 et 5, ce qui donne

$$\frac{32 \times 11}{16}$$

22 pistoles pour A et, bien sûr, 10 pistoles pour B.

Plus généralement, si A doit gagner encore i parties avant de ramasser l'enjeu et B, j parties, le nombre maximum de parties à jouer est $i+j-1$; en raisonnant comme précédemment, nous pouvons construire 2^{i+j-1} suites formées des lettres a et b, représentant des suites de parties successives possibles. Le nombre de suites qui donnent A gagnant est :

$$\sum_{k=i}^{i+j-1} C^k_{i+j-1} .$$

L'attribution de l'enjeu, s'ils cessent de jouer, sera donc

$$\frac{M\sum_{k=i}^{i+j-1} C^k_{i+j-1}}{2^{i+j-1}} \text{ pour } A, \text{ et } \frac{M\sum_{k=0}^{i-1} C^k_{i+j-1}}{2^{i+j-1}} \text{ pour } B.$$

Mais on voit que, pour arriver au résultat, Fermat calcule les probabilités de gagner de l'un et l'autre joueur, contrairement à Pascal.

Il existe encore d'autres voies, pour résoudre le problème des parties, mais mon but n'est pas de les explorer, mais de m'attarder sur les questions soulevées par ce problème et ces solutions; car elles contiennent implicitement la plupart des développements du calcul des probabilités, depuis que fut posé le problème des parties, jusqu'à nos jours (et, plus largement les réponses apportées à l'incertitude dans laquelle nous sommes plongés), comme une graine comprend déjà l'arbre futur.

Les quelques questions qui me viennent à l'esprit, je les énumère :

1. Il y a, dans le problème des parties, une incertitude quant au partage de l'enjeu. Mais, comme je le disais, nous sommes plongés dans l'incertitude: incertitude du futur, mais aussi du passé qui ne nous a laissé que quelques traces. Incertitude du présent car nous ne recevons, notamment du fait de notre situation géographique précise, que des informations très limitées sur ce qui se passe dans le monde. Dès lors, comment se fait-il que, si tardivement, on se soit essayé à se décider raisonnablement dans l'incertitude ?
2. Pourquoi d'ailleurs, dans un problème de ce genre recherche-t-on une méthode infaillible pour partager, au lieu, tout simplement, de laisser les joueurs s'arranger entre eux de gré à gré ?
3. En fait, on utilise la raison et l'on pourrait penser que la raison est décisive, dans un cas de ce genre et pourtant, Pascal semble, comme nous le verrons, avoir besoin du résultat de Fermat pour confirmer le sien.
4. Autre question : ce sont des parties consécutives, des épreuves répétées donc, comme on dit, qui ont conduit à chercher une méthode pour se conduire dans l'incertain. Pourquoi? L'incertain se manifeste bien autrement qu'au cours d'épreuves semblables répétées.
5. Pourquoi Pascal et Fermat font-ils l'hypothèse de *chances égales*, donc l'équiprobabilité dans chaque partie; mieux, Fermat essaye de décomposer le problème de façon à obtenir des événements, les suites, qu'il considère comme équiprobables; que vaut leur jugement à ce propos ?
6. Enfin, deux esprits différents président aux deux solutions; on pourrait peut-être dire que Pascal s'occupe directement de décisions à prendre, Fermat, plus abstrait, s'intéressant au calcul des chances, donc des probabilités de gagner, ce qui ne devrait pas, *a priori*, conduire à une quelconque décision. Est-ce fortuit ?

Je vais tâcher de considérer ces questions posées un peu en vrac.

1. Pour en venir à la première question, pourquoi les mesures de l'incertitude sont-elles nées si tard, il faut dire que nous cherchons à éviter l'incertitude comme les mathématiciens évitent les cas particuliers trop compliqués, les *monstres*, ce qui explique la naissance toute récente des fractals. De soi, l'incertitude cause l'angoisse et nous cherchons à connaître pour prévoir, à vivre donc dans un monde certain.

Pour ne pas vivre dans un univers insolite, nous en recherchons d'abord les régularités. Régularités dans le temps, par attention aux phénomènes qui se reproduisent à intervalles réguliers, comme, par exemple, la naissance du soleil ou la rotation de la sphère céleste; ces phénomènes nous rassurent par leur régularité qui nous permet de prévoir et c'est ce que nous appelons connaître.

De même, nous recherchons des régularités dans l'espace, en assimilant des objets distincts par métaphore; à vrai dire, deux objets ne sont pas superposables, mais, si on leur reconnaît des propriétés communes, ils sont considérés comme tels, d'où la notion d'ensemble.

Ainsi la science commence-t-elle par l'astronomie de position et par l'arithmétique. Ce sont là, sûrement, les plus vieilles sciences.

La géométrie naît de l'arithmétique, par la considération des longueurs, surfaces, volumes mais ne s'y réduit pas malgré l'essai tenté; la manœuvre a échoué par le scandale des longueurs incommensurables, comme le sont le côté et la diagonale du carré.

C'est donc beaucoup plus tard qu'on va s'essayer à apprivoiser le hasard, encore que les proverbes s'y soient depuis longtemps attachés, par exemple: *Noël au balcon, Pâques au tison* ce qui est un premier essai pour trouver une sorte de régularité dans ce qui est incertain: ici, la température à venir; ce qui permet encore de prévoir, plus ou moins.

Il faut noter que l'homme s'efforce, autrement que par la connaissance, à éviter l'incertain: en cessant de vivre dans la nature où n'importe quoi peut survenir, au hasard, en construisant donc un monde certain, la ville, où les rues se coupent à angle droit, où les maisons sont numérotées, où la climatisation écarte les fantaisies de la nature, où le téléphone nous garde des visites imprévues.

Le bébé est lui-même placé dans un univers construit, dans un berceau qui ne change pas, une pièce toujours la même, au moyen de repas que l'on s'efforce de rendre réguliers, et ces manœuvres lui permettent de s'y reconnaître, de développer son intelligence, de supprimer sa peur.

On peut ajouter d'ailleurs que l'homme ainsi placé dans un univers connu finit par s'ennuyer effroyablement et, par un mouvement contraire, recherche les jeux de hasard, ou s'embarque pour traverser l'océan en solitaire, ou se met, comme Tartarin, en position de rencontrer des lions.

Car, au-delà des frontières du connu, du prévisible, l'incertain se retrouve, avec ses angoisses, ce qui est peut-être un sens à donner au fameux vers de Mallarmé: *Un coup de dé jamais n'abolira le hasard;* le dé lancé, le hasard meurt, mais on le retrouve; au-delà de nos constructions et de nos *connaissances,* l'incertain demeure.

2. J'en viens à ma deuxième question: pourquoi, dans le problème des parties, recherche-t-on une méthode générale? Ces deux joueurs ne peuvent-ils pas s'entendre sur n'importe quelle règle décidée entre eux et qui tienne lieu de loi? Autrefois, dans certaines régions, les bûcherons, pour cuber leurs arbres, multipliaient la longueur de l'arbre par la surface du cercle situé à mi-chemin des deux extrémités: le résultat était faux, mais c'était sans importance puisque tout le monde était d'accord. Mais non, on

cherche une solution qui ne puisse être discutée, qui ait donc un caractère transcendant, comme en morale, où l'on ne saurait se satisfaire vraiment d'une règle de consensus: il faut trouver une «vérité» du partage qui échappe à la subjectivité, qui accorde nécessairement tout homme doué de raison, qu'il serait sot de refuser.

Je ne suis d'ailleurs pas bien sûr que, dans le cas présent, on ait trouvé la vérité, mais c'est elle qu'on recherche.

On utilise donc, comme en mathématiques, une chaîne d'affirmations considérées comme évidentes, ce qu'on appelle un raisonnement. En mathématiques, cela marche assez bien et c'est pourquoi le résultat obtenu, le bout de la chaîne, est appelé «théorème», c'est-à-dire, chose divine, qui nous transcende donc.

Mais, une «explication», qui marche en mathématiques, peut boiter dès qu'il s'agit de phénomènes concrets, d'où la très juste moquerie de Molière, lorsque Sganarelle raisonne sur le cas de la fille de Géronte, prétendument muette:

> Pour en revenir à notre raisonnement, je tiens que cet empêchement d'action de la langue est causée par de certaines humeurs que nous appelons entre nous autres savants, humeurs peccantes.
> Ces vapeurs dont je vous parle, venant à passer du côté gauche où est le foie, au coté droit où est le coeur, il se trouve que le poumon, ayant communication avec le cerveau par le moyen de la veine cave, rencontre en son chemin les dites vapeurs qui remplissent les ventricules de l'omoplate; et, parce que les dites vapeurs ont une certaine malignité qui est causée par l'âcreté des humeurs engendrées dans la concavité du diaphragme, il arrive que ces vapeurs... ossabandus, nequeis, nequer, potarinum quipsa milus. Voilà justement ce qui fait que votre fille est muette.

Il y a tout là: les affirmations peu sûres, le langage qui se fait abscons pour faire surgir l'argument d'autorité. On fait parfois mieux, mais pas toujours.

On sait d'ailleurs bien, je crois, que nos modèles, créés par la raison, ne sont pas bien adéquats à la réalité décrite. Mais qu'importe s'ils permettent à peu près de prévoir? Et si on se trompe, on est toujours content de s'être trompé raisonnablement, ce qui est une grande consolation: à la limite, la nature a tort.

Dans le cas présent, il s'agit d'un jeu, donc d'un phénomène construit. Néanmoins, la réalité est représentée par la pièce qui tournoie et se couche, et c'est de là, notamment, que pourra venir la critique de la solution au problème des parties.

3. J'ai dit qu'on recherchait la vérité, une solution qui s'impose et non un consensus, mais, à vrai dire, on n'y croit vraiment que s'il y a consensus, un accord à plusieurs, au moins, et c'est bien étonnant puisque, *a priori*, la raison possède, en soi, une universalité.

Mais, dans le problème que nous examinons, les méthodes proposées sont neuves, les solutions, inhabituelles. C'est pourquoi, Pascal, après avoir reçu la solution de Fermat et constaté l'identité des résultats, lui écrit, le 29 juillet 1654:

> Je ne doute plus, maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

Il faut en conclure qu'il y a toujours inquiétude à avoir raison tout seul. Ici, deux solutions différentes donnent le même résultat, et c'est «admirable», c'est-à-dire étonnant, dans le langage du Siècle; il est donc très «probable» qu'on a rencontré juste, puisqu'il y a une vérité pour trente-six mille erreurs. De même, les étudiants comparent leurs solutions.

On retrouve quelque chose de comparable dans les définitions de grandeurs: on ne se pose plus de question sur la notion de longueur et sa mesure, car tout cela est ancien et l'on en a l'habitude.

Mais lorsqu'il s'agit de grandeurs nouvelles, comme, par exemple, la concentration d'une population sur un territoire, il faut en arriver à une définition universelle de la notion et de sa mesure qui nécessite un accord, ce qui n'est actuellement pas le cas. Tant que cela ne sera pas fait, la notion semblera floue et n'aura pas droit de cité parmi les esprits positifs. Dans des cas analogues, la «communauté scientifique», comme on dit pour se rassurer, s'en mêle. Mais, «quelle est cette femme?», comme aurait dit Joseph de Maistre.

4. J'en arrive à la question: pourquoi le calcul des probabilités est-il né des épreuves répétées, alors que la probabilité est une mesure de l'incertain et que celui-ci se manifeste de bien d'autres façons?

C'est pour la même raison que celle qui inaugure l'astronomie: l'observation de régularités dans l'examen d'une longue suite d'épreuves répétées. Ces régularités, c'est ce qu'on appelle les lois des grands nombres: le fait, par exemple, que la fréquence relative des faces obtenues en lançant une pièce de monnaie deviennent proche de $^1/_2$ lorsque le nombre de lancers est grand, ce qu'on précise au moyen du Théorème de Bernouilli: la fréquence relative converge en probabilité vers $^1/_2$.

Mais, inversement et pratiquement, si on lance une pièce de monnaie un grand nombre de fois, la fréquence relative des faces «estime» la probabilité d'obtenir face.

Ce sont ces lois des grands nombres qui permettent ce jeu de société qu'on appelle «les sondages», où il s'agit par exemple, avant l'événement, de savoir si la population va voter à droite ou à gauche. A l'origine du sondage, il y a le prélèvement «au hasard», dans la population, c'est-à-dire qu'il convient que chacun ait la même probabilité d'être choisi pour figurer dans le sondage.

La difficulté est, ici, de prélever au hasard, difficulté que l'on ignore, ou que l'on veut ignorer, dans les lancers de pièces de monnaie.

Une autre difficulté bien connue est l'évolution des opinions des individus composant la population au cours du temps: c'est comme si la pièce de monnaie de Pascal devenait progressivement plus lourde d'un côté que de l'autre, ce qui modifierait quelque peu la solution du problème des parties.

5. Si l'on veut critiquer les méthodes de Pascal et de Fermat, il faut se poser la question de l'équiprobabilité dans le jeu de «pile ou face», ou, «croix ou pile», comme on disait.

Une « raison » *a priori* nous conduit à parler d'égalité des chances : la pièce est symétrique, probablement homogène, elle est lancée « convenablement » et, (là, il y a un saut dans le raisonnement) on n'a pas de raison d'avantager face ou pile : c'est une raison négative en quelque sorte, c'est l'incertitude parfaite, liée à notre ignorance parfaite, qui nous fait parler d'égalité des chances.

Mais, comme on l'a vu, il existe une raison *a posteriori*; Pascal s'adresse à des joueurs qui ont eu l'occasion de remarquer que pile revenait, en gros, autant que face (et qui, cependant, et c'est étonnant, comptent gagner) au cours d'un grand nombre de parties : raison toute différente, qui anticipe le théorème de Bernouilli.

Au fond, cette raison *a posteriori* apparaît comme la seule sérieuse, mais il faut remarquer que ce n'est pas une fréquence relative, estimation absolument correcte, comme on dit, qui est retenue, mais : $^1/_2$, $^1/_2$ (qui est d'ailleurs sûrement faux), ce qui prouve l'influence de l'opinion *a priori*.

Mais cette influence introduit donc une subjectivité dans le choix, même si cette subjectivité est partagée, qu'il y a consensus.

C'est cette remarque : même dans les problèmes d'épreuves répétées, il s'introduit une certaine subjectivité dans le choix d'une probabilité, qui ouvre la porte à la probabilisation dans d'autres cas.

Lorsqu'il s'agira de probabiliser un ensemble d'événements possibles, on réservera, comme précédemment, l'équiprobabilité à l'ignorance totale où l'on se trouve quant à la réalisation de cet événement. Mais, généralement, on a une certaine idée préalable des chances possibles, idée grossière, mais fondée sur une expérience passée (car tout événement connu est répétitif), ce qui nous rapproche des épreuves répétées ; ainsi un médecin devant un malade : a-t-il des chances de s'en tirer ? Le médecin a une opinion fondée sur des cas précédemment rencontrés : peut-être peut-il aller jusqu'à chiffrer son opinion ?

C'est sur ces opinions préalables qu'est fondée, en grande partie, la théorie de la décision.

Tout ceci revient à dire que chacun vit avec une expérience passée qui lui permet certaines opinions sur l'avenir incertain ; et, si j'ai l'idée qu'une probabilité vaut $^1/_3$, par exemple, même si j'ai la possibilité de pratiquer quelques épreuves répétées qui me donneront une fréquence relative, je n'ai pas de raison d'abandonner complètement ma première idée ; la théorie de la décision permet une estimation tenant compte à la fois de l'opinion fondée sur l'expérience passée et sur l'expérience actuelle.

Elle a ceci de beau qu'elle affirme, somme toute, que l'expérience actuelle n'annule pas l'expérience d'une vie. L'estimation d'une probabilité apparaîtra comme l'espérance mathématique d'une distribution a posteriori : depuis Pascal, la décision est une espérance mathématique.

6. Enfin, il est intéressant d'examiner le fait des deux démonstrations simultanées et différentes au même problème, ce qui manifeste deux tempéraments scientifiques, ce qu'on retrouve dans d'autres occasions ; par exemple, au même moment, Leibniz et Newton inventent les dérivées ; mais, en fait, il s'agit, pour Leibniz, des différentielles, ce qui est la même chose formellement, mais tout autre chose pour l'usage.

Pascal ne calcule pas les chances de gagner de l'un ou l'autre joueur, il calcule, comme nous l'avons vu, directement la somme que chacun d'eux doit recevoir en cas d'arrêt, l'espérance mathématique, donc ; il effectue ce calcul à l'aide d'une équation aux différences finies, il invente l'espérance mathématique.

Fermat calcule les probabilités de gagner, pour l'un ou l'autre, c'est à la mesure des probabilité qu'il s'intéresse.

Et c'est bien deux courants qui vont se développer par la suite : pour bien des probabilistes, aujourd'hui, la probabilité n'est qu'une mesure ; un probabiliste doit donc se consacrer à la théorie de la mesure, distinguer les familles d'ensembles qui peuvent servir de base à une mesure, les boréliens, donc, qui forment une algèbre. Puis, les questions annexes se posent : est-ce que les boréliens constituent la famille de tous les sous-ensembles d'un ensemble donné, etc. Ce sont les disciples de Fermat.

D'autres, et ce peut parfois être les mêmes, s'intéressent à la statistique mathématique, celle qui décide ; ils considèrent les décisions à prendre sur les problèmes réels : ce ne sont plus les mêmes questions ni le même esprit, il s'agit des disciples de Pascal pour qui « nous sommes embarqués », la vie n'est pas un rêve, comme le pense le personnage de Calderon, et, mieux, nous sommes embarqués comme pilote du bateau.

Après leur contact, Pascal et Fermat ont suivi leurs tempéraments respectifs : Fermat s'est embourbé dans la quête des problèmes insolubles et, osons le dire, sans aucun intérêt pratique, Pascal a pensé sa propre destinée dans l'esprit qui était le sien, « nous sommes embarqués », il faut se décider, dans l'incertitude où nous sommes quant à la pérennité de notre être ; et c'est « l'infini-rien », ce passage des « Pensées » où refleuri sa conception de la décision.

Conclusion

Cette dernière réflexion me permet de conclure, à la fois sur le sujet qui nous occupe et sur ma carrière à l'Université, et même sur « une » carrière à l'Université.

Pascal écrit, dans sa dernière lettre à Fermat, qui date du 10 août 1660, donc six ans après leurs échanges probabilistes, deux ans avant la mort de Pascal :

> J'ai dit souvent que (les mathématiques) sont bonnes pour faire l'essai et non pas l'emploi de notre force,

ce qui peut se comprendre de deux façons.

- On peut traduire, et l'on reste dans la carrière : il faut faire des mathématiques, mais en sortir pour les appliquer à des problèmes concrets.
- Mais on peut encore faire comme Pascal lui-même, qui consacre les trois dernières années de sa vie, tel qu'il est, avec sa puissante raison et son cœur (« c'est avec le cœur qu'on fait de la géométrie ») à son grand ouvrage d'apologétique.

C'est un exemple.

Il faut ajouter que trois ans avant sa mort, il invente une méthode générale pour calculer la dimension des lignes courbes, invention qui marque le début du calcul intégral: l'emploi n'avait pas tué l'essai.

C'est encore un exemple.

Département d'économétrie
Université de Genève