

# CONVEGNO DI GEOMETRIA

IN ONORE DI ERMANNO MARCHIONNA MILANO 21, 22, 23 SETTEMBRE 1992

## UN OMAGGIO A ERMANNO MARCHIONNA

DI MARINO PALLESCHI Per evidenziare i meriti di
una personalità
scientifica ritengo assai più efficace sostituire
alle consuete
manifestazioni
celebrative una
rassegna di

quanto di più prestigioso oggi produca l'ambiente culturale in cui opera il festeggiato. Se la sua presenza in una comunità ha su di essa tanto influito positivamente, sono convinto che siano assolutamente fuori luogo la retorica e l'anedottica, utilissime talvolta a riempire spazi vuoti.

Così, con alcuni amici, ho pensato d'offrire ad

#### Ermanno Marchionna

un Convegno scientifico che metta in evidenza come gli attuali contributi dei geometri italiani, soprattutto algebrici, si inquadrino in un contesto di assoluto rilievo scientifico internazionale.

I veri eredi delle idee che hanno reso gloriosi i tempi di Castelnuovo, Enriques e Severi sono forse i geometri della scuola giapponese. Questo fenomeno si poteva già rilevare allorché Kodaira applicava allo studio delle varietà algebriche di alta dimensione i metodi trascendenti sviluppati da de Rham e da Hodge. I contributi di litaka e di Ueno hanno poi reso evidente come gli scienziati giapponesi perseguissero sistematicamente il programma della classificazione delle varietà. E ciò è ancora più chiaro oggi che la teoria dei modelli minimali si è sviluppata secondo le idee di Mori e Kawamata che, prevedo, non cesseranno di



riservarci sorprese e soddisfazioni.

Tuttavia, anche altri temi della ricerca degli ultimi vent'anni, tanto affascinanti da attrarre gli studio-

si più acuti di ogni nazionalità, affondano le loro radici in risultati, metodi e congetture dell'epoca aurea.

Questi argomenti comprendono sia la Geometria della retta sia quell'analisi degli endomorfismi delle varietà abeliane, che, intrapresa da Hurwitz e G. Scorza, aveva indotto Severi ed altri a considerarne i legami con le corrispondenze a valenza.

Le ricerche di stampo classico includono anche il programma d'Enriques imperniato sulla struttura delle mappe pluricanoniche e la Geometria numerativa, che già aveva attratto Pieri e Giambelli e sollecitato alcune osservazioni di Cremona sulla scorrettezza di un certo tipo di argomentazioni.

Ancora di chiara matrice classica è lo studio della geometria dei sistemi lineari su una varietà. Questa dizione non è che un modo convenzionale di raggruppare numerosi filoni di ricerca: il problema di Brill e Noether, relativo all'esistenza di certe serie lineari su una curva; lo studio, iniziato con Noether ed Enriques, della normalità projettiva di una curva e dell'ideale che la definisce: la ricerca di morfismi suriettivi su una varietà di dimensione inferiore, che risale alle idee di Castelnuovo e di de Franchis che avevano condotto ad un criterio topologico affinché una superficie fosse rigata.

Non va poi dimenticato che già

Enriques marginalmente e Severi in modo sistematico si erano occupati dell'irriducibilità della varietà dei Moduli delle curve di genere dato.

Ai loro lavori e ad alcune osservazioni di Castelnuovo si riaggancia una messe di risultati recenti relativi al problema dei Moduli per varietà di piccola dimensione o per fibrati vettoriali.

Infine, benché sia certo di dimenticare molti temi attuali che pure rientrerebbero a buon diritto in questo panorama, mi limito ad aggiungere l'interesse per le guestioni di razionalità, già considerate da Fano con lo studio delle varietà che oggi portano il suo nome e da Enriques, ad esempio con un celebre criterio di unirazionalità per fibrati in coniche. A questo proposito bisogna anche osservare che, sebbene i principali oggetti di studio da parte dei classici fossero curve e superfici, l'attuale interesse per le varietà di dimensione superiore trova riscontri anche in alcune ricerche di guell'epoca: accanto ai lavori cui si è appena alluso vanno ricordati, ad esempio, quelli di G. Scorza.

In considerazione della profondità di queste tematiche nonché della vastità e difficoltà delle tecniche necessarie a trattarle, mi sembra ancora più importante il fatto che in tali campi di ricerca oggi lavorino con successo numerose personalità italiane.

Ai lavori di Deligne, Mumford e Fulton sull'irriducibilità dello spazio dei Moduli delle curve di dato genere si accostano contributi italiani,



relativi al problema di Severi, proprio nello spirito in cui i classici avevano affrontato la questione; altri si inquadrano nel contesto dei prodigiosi risul-

tati di Mumford, Harris, Eisenbud sulla non unirazionalità del suddetto spazio di Moduli. Con Zariski taluni condividono il merito d'aver applicato la teoria delle deformazioni allo studio delle varietà delle curve piane con alcuni caratteri fissati.

Un folto gruppo di geometri italiani sì è inserito poi nella serie di ricerche relative alla classificazione dei threefold di Fano che, riprese da Iskovskih, sono culminate nei contributi di Mori e Mukai. Ciò è avvenuto anche in relazione alle questioni di razionalità e unirazionalità, il cui interesse si è rinnovato, negli anni '70, a seguito dei sorprendenti controesempi al problema di Lüroth dovuti a Iskovskih e Manin e a Clemens e Griffiths, e grazie alla messa a punto da parte di Beauville di un metodo per studiare tali problemi.

L'estrema difficoltà insita in tali questioni ha fatto convergere l'interesse dei matematici su proprietà più deboli della razionalità, come l'esistenza di molte curve razionali su una varietà. I fondamentali risultati di Mori e Kollár in questa direzione hanno consentito allo stesso Mori e a Lazarsfeld di provare importanti congetture relative a caratterizzazioni dello spazio proiettivo, mentre i geometri italiani li hanno applicati allo studio della congettura di Hodge.

La messa a punto di raffinati criteri di vanishing ha favorito la ripresa dell'analisi strutturale delle mappe pluricanoniche di una superficie di tipo generale. A partire dai lavori di Kodaira e Bombieri della fine degli anni '60 le

proprietà di queste mappe sono state via via precisate anche grazie all'impiego di ulteriori sviluppi tecnici, che sono culminati, alla fine degli anni '80, nel cosiddetto metodo di Reider. E' proprio in questa direzione che si caratterizza per grande vivacità il contributo dei geometri algebrici italiani.

D'altra parte queste ricerche hanno reso evidente che alcune buone
proprietà strutturali -ad esempio la
birazionalità- di una certa mappa
pluricanonica falliscono relativamente a classi molto particolari di
superfici di tipo generale. Ciò ha
attirato l'attenzione dei matematici
sulle superfici con invarianti di valore basso. E a questo proposito notevoli risultati di geometri italiani
sono in linea con quelli di Horikawa
e Reid relativi, appunto, alle superfici speciali di tipo generale.

Parallelamente, connessa allo studio dei modelli canonici di una superficie, si è fatta strada l'idea di Mumford, sviluppata da Reid, di analizzare la generazione dell'anello canonico. In questa direzione vanno numerosi contributi italiani, come quelli volti a stabilire un confine superiore per il grado di un sistema minimale di generatori di tale anello.

Molto difficile sarebbe elencare in modo esaustivo i risultati della Geometria algebrica italiana di assoluta rilevanza internazionale degli ultimi vent'anni.



A solo titolo d'esempio, ai precedent i voglio aggiungere: i primi studi sullo spazio dei moduli delle superfici di tipo generale; gli sforzi tesi a pro-

vare la congettura di Novikov, relativa a una caratterizzazione delle Jacobiane tra le varietà abeliane; l'assetto gruppale di una teoria adatta ad affrontare questioni di geometria numerativa introdotte da Halphen; le ricerche sui generatori dell'ideale omogeneo che definisce una varietà liscia. Queste ultime completano quella serie di lavori di Gaeta, Dubreil, Peskine, Szpiro e Mumford che ha condotto alla puntualizzazione delle proprietà sizigetiche dell'ideale, dovuta ad Ein e Lazarsfeld.

Ora, a me sembra che questa sfolgorante rinascita della Geometria algebrica italiana renda opportuno riconoscere il ruolo giocato, negli anni '60, da un gruppo di colleghi per la verità molto pochi- che hanno continuato nell'ambito di questa disciplina a svolgere la loro attività scientifica e a promuovere quella altrui. E questo proprio quando molti esponenti della comunità matematica di quegli anni se ne erano allontanati secondo la diffusissima opinione che la Geometria algebrica andasse rifondata su basi analitiche e algebriche più rigorose.

Con un atteggiamento non in linea con le scelte più comuni, questo piccolo gruppo di geometri ha saputo mantener viva e tramandare una tradizione culturale e, almeno in parte, contrastare l'atteggiamento di generale disagio manifestato nei confronti dei metodi classici.

Fin dall'inizio degli anni '40 la comunità matematica internazionale aveva preso coscienza dell'inadeguatezza di certo

linguaggio ad affrontare le questioni che lo sviluppo della Geometria algebrica aveva reso naturali. Molti matematici, tra cui Zariski, Weil e Van der Waerden, avevano sentito l'esigenza di stabilire solide basi per i concetti oggetto di studio della Geometria algebrica, Iniziò così quella fase fondazionale che culminò nelle visioni di Grothendieck. in grande anticipo rispetto ai tempi. Tuttavia, anche quando questi strumenti algebrici e la loro controparte analitica avevano assunto un assetto soddisfacente, non si potè assistere in Italia alla naturale continuazione delle tradizioni geometriche in misura comparabile al passato.

Certamente difficile era l'aggiornamento dopo che il Paese era rimasto separato dalle scuole più avanzate durante il periodo bellico e quando ben altri erano i problemi di cui ci si doveva occupare. Alle enormi difficoltà oggettive bisogna aggiungere l'effetto negativo del sarcasmo di cui erano fatte oggetto le ricerche dei nostri più insigni geometri, in considerazione di alcune loro dimostrazioni incomplete o non rigorose. Tutto questo, nell'ambito della comunità matematica italiana, diede origine appunto a un diffuso scetticismo nei confronti della Geometria algebrica e dei metodi classici.

Da un lato non si può non condividere l'invito alla cautela se questa



si risolve nell'aggiornamento degli strumenti tecnici. Certamente era, ad esempio, impossibile ignorare come Serre avesse trasferito in Geometria i

metodi impiegati da Cartan relativamente ai fasci e ai loro gruppi di coomologia. D'altra parte va stigmatizzato il fatto che talune posizioni di netto rifiuto del nostro passato abbiano condotto alla disincentivazione in Italia delle ricerche nel campo della Geometria algebrica.

E', quindi, doveroso ricordare quel piccolo gruppo di geometri che, accanto ai loro indiscussi meriti scientifici, hanno avuto la capacità di conservare e tramandare una tradizione culturale di altissimo livello favorendone la prosecuzione alla luce delle più recenti tecniche algebriche, analitiche e topologiche, adeguate ad apportare nuovi contributi a problemi classici.

Mi sembra anche giusto ricordare il superamento o, comunque, l'accettazione di quel sentimento d'isolamento e solitudine, di

### melencolia,

per mutuare dal linguaggio neoplatonico un termine efficace, dello scienziato o dell'artista che teme accantonati e resi inutili tanti anni di studi.

Non so se questi uomini siano stati gli ultimi frutti della grande scuola italiana.

Preferisco considerarli come gli ispiratori delle personalità di spicco di cui oggi è ricca anche la nostra nazione.

E' stato quindi spontaneo decidere che il Convegno si aprisse con un quadro della Geometria italiana ai tempi in cui il Marchionna ha iniziato la sua atti-

vità scientifica. Esso verrà tracciato da colleghi che, per la loro formazione, se non per la provenienza, sono sempre stati vicini all'ambiente nazionale. Successivamente altri colleghi testimonieranno l'assoluto valore dell'attuale Geometria italiana e la sua perfetta assonanza con le tematiche di maggior rilievo internazionale. In fine, una tavola rotonda farà il punto della situazione della Geometria oggi in Italia in vista delle prospettive future.

Non posso -e del resto non lo vorrei neppure- anticipare qui i risultati scientifici del Convegno. Tuttavia anche senza conoscere specificatamente il contenuto delle conferenze che sentiremo, sono a priori possibili alcune considerazioni di carattere generale.

Sono certo che gli argomenti presentati confermeranno una volta di più che la miglior Geometria attuale prosegue nel totale superamento, iniziato da più di vent'anni, di quella fase fondazionale che, dagli anni '40 all'inizio dei '60, aveva messo in ombra molti problemi classici.

Non voglio certo sminuire qui il poderoso lavoro di molti matematici che, presa coscienza dell'inadeguatezza di certo linguaggio, hanno rivolto i loro sforzi a stabilire solide basi algebriche per la Geometria. Intendo, invece, ribadire il fatto che ora questa fase è superata e, semplicemente, confessare la persona-



lissima preferenza per la G e o m e t r i a "descrittiva" a cui siamo ritornati all'inizio degli anni '70. Ciò che sentiremo basterà a garantire che

ancora per molti anni rimarremo in quel momento, per me felice, in cui ci si inoltra in un terreno sconosciuto alla ricerca del nuovo e non dei metodi per conseguirlo, in cui, però, la fantasia creatrice si lascia guidare dal lavoro dei grandi predecessori, evitando in tal modo di dare alla luce impossibili

#### monstruos.

Come sempre accade nell'evolversi di una scienza, i risultati di maggior rilievo di questa fase costruttiva necessiteranno, in futuro, di un riassetto formale alla luce dei progressi oggi lontani.

Tuttavia, credo che, nella sostanza, essi saranno ritenuti immuni da errori o incompletezze. Ma, anche se ciò non dovesse accadere, è mia ferma convinzione che il valore di queste ricerche non ne uscirà minimamente sminuito.

Chi ci seguirà non potrà che trovare una guida e uno stimolo al proprio lavoro nella via precedentemente tracciata, anche - e forse soprattutto- nelle idee che noi non abbiamo saputo reafizzare in modo compiuto. Per quanto, invece, ci riguarda direttamente, in ogni caso voglio affermare che è stato bello lavorare o veder lavorare in queste direzioni.

Mi rendo conto dell'opinabilità

delle mie affermazioni, ma mi piace non essere solo in questa preferenza, che condivido, almeno in una versione più edulcorata, con un ben più illustre

predecessore. In occasione delle celebrazioni per il decennale della morte d'Enriques, Severi scrisse che il passo nuovo in un terreno sconosciuto va incontro a mille traboc-



chetti, ignoti agli iperassiomatizzatori che non creano, ma rimuginano le idee degli altri. E' il nuovo che conta: i metodi contano infinitamente meno.

(....) Il rigore non ha, neppure in matematica, valore assoluto. Ogni tempo ha il rigore che si merita.

Marino Palleschi

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
"F. ENRIQUES"
VIA C. SALDINI 50 - 20133 MILANO

LE IMMAGINI RIPRODOTTE SONO TRATTE

DA: ALBRECHT DÜRER "MELENCOLIA I",

1514 - FRANCISCO GOYA Y LUCIENTES

"EL SUEÑO DE LA BAZON PRODUCE MONSTRUOS",

IOV. 43 DI LOS CAPRICHOS, C. 1797.