Autori vari

Rendiconti del Seminario Matematico di Brescia

Saggi in onore di Carlo Felice Manara

a cura di Siro Lombardini, Giovanni Melzi, Pier Carlo Nicola

volume decimo

VITA E PENSIERO
Pubblicazioni della Università Cattolica
Milano

CLAUDE TRICOT

Des réseaux

Je voudrais, par les lignes qui suivent, rendre hommage, modestement, à mon ami très cher, le professeur Carlo Felice Manara dont la pensée subtile et la culture si variée m'ont tant apporté dans nos rencontres, à Genève, à Milan et autres lieux plus infimes. De quoi parler, à Manara, ici et partout, sinon de géométrie? Cependant, Pascal, en étudiant la cycloide, ne s'arrétait pas aux propriétés géométriques de cette courbe, mais inventait une méthode de calcul de sa longueur, méthode qui pouvait, et fut, généralisée à d'autres courbes. En suivant cette voie, plutôt que d'objets géométriques, je parlerai donc d'une méthode générale d'analyse des objets géométriques: les réseaux.
Un *réseau*, sur une droite, est une suite de *grilles*, chacune d'elles étant une réunion de *mailles* consécutives, égales, qui sont des intervalles semi-ouverts à gauche, par exemple. Les extrémités des intervalles sont des *noeuds* et l'on peut construire une grille, à partir de la précédente, en ajoutant à celle-ci de nouveaux noeuds; mais cette dernière condition, souvent commode, n'est pas nécessaire. Un réseau, dans le plan, est une suite de grilles dont chacune est le produit cartésien de deux grilles de même rang sur des axes perpendiculaires.
Si un ensemble de points, E, est défini sur un axe ou dans le plan, il est *analysé* par une grille par le fait qu'une maille contient, ou non, des éléments de E. Mais cette analyse a quel but? C. Jordan a utilisé des réseaux pour définir une mesure extérieure et une mesure intérieure de E; C. de La Vallée Poussin, à propos d'une fonction d'ensemble sur E, les a utilisées pour définir des dérivées supérieures et inférieures de cette fonction. Ils seront utilisés, ici, pour mesurer la *densité* de E.
Nous supposerons, par exemple, E sur la droite, et borné; dans ce cas, les bornes inférieure et supérieure de E seront des noeuds pour

les différentes grilles. Les ensembles analysés sont, généralement, des compacts et même des compacts sans points isolés, c'est-à-dire des ensembles parfaits, nulle part denses, généralement de mesure-L nulle, comme l'ensemble triadique de Cantor. De tels ensembles font partie de ce qu'on appelle aujourd'hui des objets fractals, suivant la terminologie du professeur Mandelbrot; l'ensemble de Cantor appartient même à la sous-catégorie des fractals à similitude interne. La mesure d'un tel ensemble est un paramètre sans beaucoup d'intérêt, puisqu'il est nul; d'où l'introduction de la densité, c'est-à-dire d'une mesure de la façon dont il occupe son support; d'autres auteurs ont parlé de raréfaction, d'épaisseur, de dimension fractionnaire, dimension de Haussdorf, dimension de packing; pour beaucoup d'ensembles, le nombre est le même quoique les définitions soient différentes (certaines, équivalentes[1]); pour l'ensemble de Cantor, elles donnent toutes log2/log3.

Les objets fractals analysés peuvent être de nature géométrique, mais aussi probabiliste: réalisation d'un processus aléatoire; ou physique: côtes découpées, surfaces rugueuses, population d'un territoire, circuits électriques; une dimension ou une densité peuvent être calculées pour ces objets par des moyens divers.

Je voudrais en rester aux réseaux et, comme les travaux effectués sur les fractals deviennent nombreux, parler de ce dont on ne parle pas, je crois: d'une typologie des objets géométriques, puis d'une application pratique des réseaux.

I. A. Soit F une famille de fonctions d'une variable, positives, croissantes, de limite infinie quand la variable tend vers l'infini. De plus, leur ordre de croissance est inférieur à celui de la variable. Ainsi:

$$f \in F \Longrightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Soit, d'autre part, E un ensemble borné infini, inclus dans l'intervalle $[a, b]$; a et b peuvent être les bornes inférieure et supérieure de E.

---

[1] C. Tricot Jr. 12, *Définition de la densité logarithmique*, Comptes Rendus de l'Académie de Science 1982.

Soit enfin un réseau, a et b étant des noeuds pour les différentes grilles. Soit g_n la grille qui comprend n mailles sur $[a, b]$ et $\omega(n)$ le nombre des mailles rencontrant E.
On appellera *densité suivant f*, où f est un élément de F, la quantité:

$$d_f = \limsup_{n \to \infty} \frac{f[\omega(n)]}{f(n)}.$$

Si l'on prend $f(x) = \log x$, on obtient la densité logarithmique, dont la valeur, pour l'ensemble de Cantor, est la dimension de Haussdorf. C'est la seule fonction de F utilisée jusqu'ici, me semble-t-il. Cependant, il est facile de construire des ensembles pour lesquels $d_{log} = 0$; ce nombre ne dit donc pas grand chose sur un tel ensemble; il conviendra alors de trouver dans F une fonction f d'un ordre inférieur au logarithme, pour laquelle d_f soit strictement positive. Son ordre de croissance, adjoint à la valueur de d_f, caractérisera l'ensemble, et ainsi pourra se constituer une typologie des ensembles bornés de mesure-L nulle.
A vrai dire, ceci conduirait à préciser F: que ce soit une famille dénombrable; que deux fonctions distinctes aient un ordre de croissance différent (faute de quoi les deux densités, calculés pour un même ensemble, pourraient être positives mais différentes). On pourrait ajouter: si $f_1 \in F$ et $f_2 \in F$ et si l'ordre de f_2 est supérieur à celui de f_1, $f_1(x)/f_2(x)$ tend vers 0 en décroissant. Cette dernière condition entraine: $d_{f_2} \leq d_{f_1}$.
Il reste à montrer qu'on peut obtenir un ensemble F suffisant, c'est-à-dire que tout ensemble E pourra trouver dans F une fonction telle que la densité associée soit positive.
Soit donc E un ensemble infini borné. L'ensemble étant infini, $\omega(n)$ augmente indéfiniment avec n; et l'on a toujours: $\omega(n) \leq n$. Soit $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers tels que:

$$h \in \mathbf{N} \iff \omega(h) \leq n.$$

$\mathbf{N}$ est fini et non vide puisqu'il comprend n.

— Si $\omega(n)/n$ n'a pas pour limite 0, E a une densité positive suivant la fonction $f(x) = x$, donc pour toute fonction de F,

— Si $\lim_{n \to \infty} \omega(n)/n = 0$, pour ε donné il existe λ tel que:

$$n > \lambda \Longrightarrow \omega(n)/n < \varepsilon.$$

Considérons les grilles g_{2n} et g_n; pour n satisfaisant à: $n > \lambda$

$$\omega(2n) \leq 2\,\omega(n) < 2\,\varepsilon\, n.$$

Par suite:

$$\omega(2n) < n \quad \text{pour} \quad \varepsilon \leq 1/2.$$

Il existe donc dans $\mathbf{N}$ des entiers supérieurs à n.

1. Soit k_0 tel que: $k_0 > \lambda$.

Soit k_1 le plus grand entier de K_0:

$$\omega(k_1) \leq k_0 \text{ et, pout tout entier } j\text{: } \omega(k_1 + j) > k_0$$

De plus:

$$k_1 > k_0.$$

De même, k_m est défini à partir de k_{m-1} comme étant le plus grand entier de K_{m-1}; k_m a les propriétés suivantes:

$$\omega(k_m) \leq k_{m-1}$$
$$\omega(k_m + j) > k_{m-1}$$
$$k_m > k_{m-1}$$

(k_m) est une suite infinie d'entiers.

2. Soit (u_m) une suite croissante de nombres positifs de limite infinie, telle que:

(1) $$\lim_{m \to \infty} \frac{u_m}{k_m} = 0$$

(2) $$\limsup \frac{u_{m-2}}{u_m} > 0.$$

On construit f ainsi:

(3) $$f(k_m) = u_m$$

(4) f croissante sur (k_{m-1}, k_m), par exemple linéairement.

3. Soit n entier tel que:

$$k_{m-1} < n \leq k_m.$$

Ceci entraine:

$$u_{m-1} < f(n) \leq u_m.$$

Mais,

$$\omega(k_{m-1}) \leq k_{m-2}$$

$$\omega(n) > k_{m-2}.$$

Donc

$$f(\omega(n)) > u_{m-2}.$$

Au total:

$$\frac{f(\omega(n))}{f(n)} > \frac{u_{m-2}}{u_m}$$

D'après la condition (2):

$$lim\ sup\ \frac{f(\omega(n))}{f(n)} > 0.$$

Les autres conditions entraînent:

$$lim\, f(x)/x = 0.$$

Ainsi, à tout E infini borné, on peut associer une fonction f telle que $d_f(E)$ soit positive.

B. Parmi les fonctions appartenant à F, on considérera plus spécialement celles dont l'ordre de croissance est inférieur à celui de la fonction logarithme. Plus précisément, on supposera que $f(x)/log\ x$ est décroissante. Cette condition entraine que:

$$f(xy) < f(x) + f(y)$$

d'où se déduisent un certain nombre de propriétés; par exemple:

— la densité d'un sous-ensemble est inférieure ou égale à la densité de l'ensemble;

— la réunion de deux ensembles a pour densité la plus grande des densités de chaque ensemble;

— la somme de deux ensembles a une densité inférieure ou égale à la somme des densités de ces ensembles.

C. La densité peut apparaitre comme un paramètre global et non local. Cependant, la définition et le théorème suivants permettent de nuancer cette idée.

Soit une suite $(I_k)_{k=1,2,\ldots}$ d'intervalles emboités comprenant un point A de E et dont la longueur tend vers 0 lorsque k augmente indéfiniment. Soit I_k et I_{k+1} deux intervalles consécutifs de cette suite.

$I_{k+1} \subset I_k \Longrightarrow I_{k+1} \cap E \subset I_k \cap E \Longrightarrow d_f(I_{k+1} \cap E) \leq d_f(I_k \cap E)$

Ainsi, la suite $(d_f(I_k \cap E))_{k=1,2,\ldots}$ est décroissante et bornée inférieurement par 0. Elle a donc une limite qui sera, par définition, la densité de l'ensemble E en A.

Cette définition est justifié par le fait qu'une autre suite d'intervalles emboîtés comprenant A donnerait même valeur à la densité en A.

Cela étant, soit M_j la j-ème maille de la grille g_k; E est la réunion des sous-ensembles $E \cap M_j$ pour tous les j de 1 a k. Il existe donc une maille M^1 telle que la densité de $E \cap M^1$ soit celle de E. Puis, on considérera la grille $g_k{}^2$; il existe une maille M^2 de cette grille, incluse dans M^1 et telle que $E \cap M^2$ ait la densité de E. En poursuivant cette construction, on détermine une suite de mailles emboitées, $(M^i)_{i=1,2,\ldots}$ qui définissent un point de l'ensemble et, en ce point, la densité est celle de E. Il existe donc, dans E, un point qui a même densité que cet ensemble et, naturellement, tout autre point de E a une densité inférieure ou égale.

Ainsi, par exemple on peut voir que la densité suivant la fonction logarithme de l'ensemble $(1/k)_{k=1,2,\ldots}$ auquel on ajoute 0, est $1/2$. Or, chaque point étant isolé, sauf 0, a pour densité 0; la densité du point 0 est donc $1/2$.

Les ensembles à similitude interne, comme l'ensemble de Cantor ont même densité en chaque point; on pourra les appeler: ensembles à densité uniforme.

II. Un réseau permet d'analyser un être mathématique tel qu'un fractal. Mais il permet aussi l'analyse d'un objet physique. Je prendrai comme exemple une population sur un territoire. On supposera que le nombre d'éléments de la population est N et l'aire du territoire, S.

L'analyse par réseau permet de définir des paramètres pour cette population. Par exemple un indice de concentration: on considère la grille g_N: si la population occupe le territoire de façon homogène, chaque element occupe une maille; si la population est concentrée en un point, une seule maille est occupée; ainsi, le nombre de mailles ne rencontrant pas la population caractérise la concentration de la population. Soit $\alpha(N)$ ce nombre; un coefficient de concentration pourra être $\alpha(N)/N$.

De même, on pourrait définir un indice d'allongement: considérant la projection de la population sur une droite, on peut mesurer la concentration de la population projetée; cette concentration sera forte si la population est groupée au voisinage d'un axe perpendiculaire à la droite sur laquelle on projette. En faisant varier la direction de la droite de projection, on fera apparaître un minimum et un maximum du coefficient de concentration, C, de la population projetée. Un indice d'allongement pourra être ainsi défini:

$$a = 1 - \frac{inf\ C}{sup\ C}$$

On peut encore observer ceci: soit g_n une grille, et $\omega(n)$ le nombre de mailles qui rencontrent la population. Le rapport $\omega(n)/n$ est l'estimation de la probabilité suivante: posons $s = S/n$ et prenons, au hasard, sur le territoire, un élément de surface d'aire s; la probabilité que cet élément comprenne au moins un élément de la population est $p(s)$.

$p(s)$ est comprise entre 0 et 1; p est une fonction croissante de s et convexe; $p(0) = 0$, et $p'(0)$ est la densité de la population, au sens des géographes.

Cette définition permet la comparaison de deux populations distinctes sur un même territoire: soit p_1 et p_2 les deux fonctions correspondant à ces deux populations; si, quelque soit s, $p_1(s) = = p_2(s)$, on dira que les deux populations ont même structure. En revanche, si la première est distribuée de façon homogène sur le territoire, tandis que la deuxième est concentrée en un point, leurs structures sont on ne peut plus différentes. On prendra, pour mesurer la corrélation de structure, la valeur moyenne des expressions:

$$1 - 2 \mid p_1(s) - p_2(s) \mid$$

lorsque s varie, qui vaut 1 dans le premier cas envisagé et 0 dans le deuxième.

SUNTO

Si introduce il concetto di « rete » (*réseau*); esso si presenta come uno strumento particolarmente adatto per un metodo generale di studio di numerosi ed importanti oggetti di varie scienze, come la Geometria, la Fisica, la Geografia, la Statistica.

SUMMARY

The concept of « network » (*réseau*) is introduced as a tool very well suited for a general method to study numerous and important objects in various sciences, such as Geometry, Physics, Geography, Statistics.