UNIVERSITÀ DI MILANO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
" FEDERIGO ENRIQUES "

20133 MILANO (Italia)
Via C. Saldini, 50 - Telef. (02) 292.393

8.5.1987

CONVEGNO DI GEOMETRIA A MILANO-GARGNANO

3° annuncio

Con il patrocinio dei Dipartimenti di Matematica dell'Università degli Studi e del Politecnico di Milano e nell'ambito del progetto nazionale "Geometria Algebrica", si terrà a Milano e a Gargnano, nei giorni 26-30 maggio p.v., un convegno di

G E O M E T R I A.

L'inizio è fissato per il giorno 26 maggio presso il Dipartimento di Matematica "F. Enriques" dell'Università di Milano, Via Cesare Saldini, 50.
I lavori seguiranno il calendario sottoindicato:

MARTEDI' 26 MAGGIO

Ore 15 Saluto delle Autorità Accademiche ai partecipanti.

Ore 15.15 C.F. MANARA, Ricordo di OSCAR CHISINI.

Ore 16.15 E. ARBARELLO, I diffeomorfismi del cerchio e la topologia dello spazio dei moduli delle superficie di Riemann.

Ore 17.45 Trasferimento a Gargnano dei partecipanti.

I lavori proseguiranno nelle giornate successive nel Palazzo Feltrinelli di Gargnano.

MERCOLEDI' 27 MAGGIO

Ore 9.30 F. GHERARDELLI, Varietà quasi-abeliane a moltiplicazione complessa.

Ore 10.45 G.B. RIZZA, Curvature bisezionali delle varietà.

Ore 12 P. VALABREGA, Curve sottocanoniche , fasci riflessivi, fibrati.

Ore 16.30 P. SALMON, Sui divisori di varietà riducibili.

Ore 17.45 M. BELTRAMETTI, Alcuni risultati sulla classificazione delle varietà algebriche di dimensione 3.

GIOVEDI' 28 MAGGIO

Ore 9.30 G. TOMASSINI, Proprietà geometriche delle soluzioni dell'equazione di Levi.

Ore 10.45 A. CONTE, Nuovi risultati sulle superficie di Enriques.

Ore 12 F. BARDELLI, Un'osservazione su un teorema di Grothendieck.

VENERDI' 29 MAGGIO

Ore 9.30	S. GRECO, Teorema di Bertini per varietà debolmente normali.
Ore 10.45	M. CORNALBA, Luogo singolare dello spazio dei moduli delle curve.
Ore 12	M. FIORENTINI - A.T. LASCU, Curve algebriche di P^3 quasi completa intersezione di tipo speciale.
Ore 16.30	D. DEMARIA, Qualche applicazione dell'omotopia ai grafi orientati.
Ore 17.45	F. BALDASSARRI, Soluzioni algebriche dell'equazione di Lamé e torsione delle curve ellittiche.

SABATO 30 MAGGIO

Ore 9	E. VESENTINI, Semigruppi olomorfi di isometrie olomorfe.
Ore 10.15	C. PEDRINI, Cicli algebrici delle varietà singolari.
Ore 11.30	R. STRANO, Sulle sezioni iperpiane di una curva.

Il comitato organizzatore
E. Marchionna, A. Lanteri, M. Palleschi

OSCAR CHISINI. Idee per la commemorazione del 26 maggio 1987.

Sulla figura di Oscar Chisini e' stato detto e scritto a lungo e con competenza superiore alla mia. Purtroppo ho contribuito anch'io a parlare ed a scrivere, se non altro per testimoniare l'affetto e l'ammirazione per un Maestro che forse non ha avuto , da vivo , quella considerazione che meritava e che e' stata conseguita da altri che forse non erano alla sua altezza.

Non staro' quindi a ripetere le documentazioni ed i ricordi che sono stati presentati in modo migliore di quello che io possa oggi presentare.

Vorrei invece concentrare la attenzione mia e dei miei ascoltatori su certi aspetti della personalita' di Chisini che possono essere oggetto di ricordi personali, senza pensare ad una valutazione scientifica, che sarebbe compito di persone piu' competenti di me .

Infatti credo che l 'osservare il modo di agire di una mente di un livelo eccelso possa servire per comprendere meglio che cosa sia la ricerca scientifica in Matematica , o almeno in una certa parte della Matematica.

Mi interessa in modo particolare l'analisi del modo di lavorare di una mente, perche' questo ricordo mi serve per chiarire, almeno un poco, ai miei occhi, la natura della Matematica, questa scienza la cui definizione pareva chiara ed inequivocabile ,ma che oggi ha assunto tanti compiti e tante fisonomie da rendere perplessi coloro che aspirano alla chiarezza ed alla trasparenza assolute (qualita' in altro tempo considerate caratteristiche della Matematica), ma che mette in evidenza il carattere di creativita' e di inventiva della nostra scienza; qualita' queste che non sempre sono conosciute ed apprezzatre da coloro che non conoscono la Matematica dall'interno.

E' interessante ricordare le caratteristiche della ricerca di Chisini per varie ragioni. Anzitutto per mettere in evidenza il ruolo della fantasia creatrice e della immaginazione e della immaginazione nella ricerca matematica.

Affronto volentieri la taccia che questa mia rievocazione abbia un tagliio piuttosto psicologico che scientifico. Ma ritengo che la considerazione di questi aspetti della creazione scientifica sia molto importante per la comprensione del pensiero matematico in particolare, ma forse anche del pensiero scientifico in generale.

Queste mie riflessioni possono anche in parte almeno giustificare la mia chiamata a parlare oggi di un maestro che ricordo ancora con affetto, ma di cui sento ancora la superiorita' intellettuale.Mo forse l'aver lavorato con lui per un periodo di tempo relativamente lungo, l'aver assistito alla creazione di certe sue realizzazioni fondamentali puo' conferire alle mie parole il valore di una testimonianza diretta ,valore che compensa lo scarso livello intellettuale dovuto ai miei limiti.

Vorrei quindi limitare le mie considerazioni a ricordare il modo di lavoro di Chisini, modo di lavoro che vorrei qui presentare non come una raccolta di aneddoti o di curiosita' inedite, ma come un tentativo di analisi psicologica e di conseguenza anche metodologica, almeno per quanto concerne la creativita' in Matematica.

Non posso fare a meno di ricordare che questo atteggiamento non e'originale: esiste infatti un noto libro di Hadamard sulla psicologia della invenzione matematica; in questa opera interessante sono esaminate varie circostanze nelle quali avviene la creazione del pensiero matematico; e del resto anche Federigo Enriques, in molti passi delle sue opere, si addentra in una analisi psicologica della creativita', e lo fa con quella acutezza e profondita' di pensiero che gli faceva perdonare anche la scarsa informazione in certi campi nei quali, a dispetto forse degli specialisti, anzi forse proprio perche egli non lo era, apportava delle vedute nuove e delle aperture di orizzonte che gli specialisti non avevano; forse proprio perche' specialisti. Ma forse Enriques era dotato in modo sommo della intelligenza creativa, e sopratutto della curiosita' umana, dell'interesse per il fatto intellettuale, della partecipazione profonda e vissuta di ogni avventura di ricerca, che non sempre i puri specialisti hanno. Ne fa fede per esempio il suo interesse per il pensiero scientifico greco; perche' in ogni opera di Enriques che parla dei greci si vede non soltanto la erudizione, ma il mettersi al loro posto, il condividere i loro interessi e la loro avventura.

Ho nominato Enriques perche' mi pare di poter dire che l'opera di Chisini mi appare ammirabile per due ragioni, in certa misura opposte; queste sono anzitutto la influenza grandissima che Enriques ebbe sul pensiero di Chisini e d'altro canto il distacco che Chisini opero', forse senza neppure rendersi conto, dalla strada che il suo maestro aveva tracciato e dal solco che aveva scavato.

Anzitutto vorrei dire della influenza del pensiero di Enriques. Mi accade piu' volte di udire da Chisini il giudizio secondo il quale la geometria algebrica dopo Enriques era profondamente diversa da quella di prima ; effettivamente l'apporto di Enriques e' in certa misura non sostituibile, se pensiamo alla teorizzazione della geometria sopra una curva ed alla sua estensione alla geometria su una superficie algebrica.

Non posso qui esaurire l'analisi della infuenza che il pensiero matematico di Enriques esercito' sull'opera di Chisini, anche perche' io penso che la personalita' di Chisini abbia influenzato in parte anche quella di Enriques; questo fatto si coglie per esempio nella redazione della opera monumentale "Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche" opera che Chisini, con noi suoi allievi, citava sempre con la espressione " Il librone". Espressione che , nella sua psicologia a volte non sempre semplice, voleva affettuosamente indicare in certo modo forse la fatica che gli era costata e la importanza culturale innegabile che essa aveva avuto nella sua vita.

Si puo' infatti criticare il "Librone" da molti punti di vista; e' comprensibile, ed e' anche umano. La critica infatti non sempre deve necessariamente essere demolizione ;essa puo' e deve essere anzitutto valutazione, presa di coscienza esplicita di certe circostanze e sopratutto dei punti di partenza, delle cose che gli autori forse davano per scontate ma che tali non erano o che almeno avrebbero dovuto essere chiaramente enunciate come tali. Si potrebbe osservare che ogni scienziato ha un patrimonio di idee di partenza, accettate e pote a fondamento della propria opera; e che la grandezza dello scienziato sta spesso nella capacita' di rendersi conto di queste idee, di valutarle e di pesarle, di passarle al vaglio del giudizio critico; e cio' non sempre per ripudiarle, ma per quella onesta' intellettuale caratteristica dei grandi spiriti, chhe costringe a porsi chiaramente di fronte ai problemi e di prendere coscienza anche dei propri limiti.

A proposito della posizione generale di Chisini di fronte alla Geometria, vorrei dire che essa coincideva pienamente con quella di Enriques: in questa concezione la Geometria si presentava come una dottrina che prende le sue origini dalla esperienze concrete, ma che si avvale della fantasia per le sue costruzioni concettuali, e sopratutto della logica per le sue deduzioni ineccepibili.

A questo propostio ricordo cio' che Chisini diceva a proposito della utilizzazione delle figure nella trattazione della Geometria algebrica: infatti questa teoria costituisce un ramo della teoria delle funzioni di una variabile complessa , e pertanto, in teoria dovrebbe avere una rappresentazione bidimensionale . Il che si ottiene, come e' noto, con gli strumenti classici che B.Riemann ha costruito, inventando quelle superfici che si chiamano appunto " superfici di Riemann" o, brevemente "riemanniane". Tuttavia ci diceva Chisini che e' possibile anche utlizzare i diagrammi soliti che si disegnano sulla lavagna, con la possibilita' di rendere almeno alcune delle proprieta' degli enti che si vogliono rappresentare e studiare . E questo continuo controllo della crtica sulla immagine, della analisi concettuale sulla fantasia, costituisce una delle lezioni fondamentali che ancora ricordo; esso del resto faceva rivivere la ben nota posizione di Platone il quale, analizzando il problema appassionante del significato e della portata delle conoscenze matematiche, diceva che l'oggetto delle considerazioni del geometra non sono le figure, ma i concetti che esse rappresentano. Il che e' eccheggiato , se si vuole, dal ben noto detto di D. Hilbert, secondo il quale ".. le figure sono delle formule disegnate".

Insisto su queste idee perche' alcune recenti correnti psicopedagogiche vorrebbero forse ridurre la Geometria a un puro tracciamento di figure, tracciamento magari eseguito con strumenti sofisticatissimi; e dimenticano cio' che gia' Platone diceva, che non conosceva gli strumenti elettronici; ma che forse usava la propria intelligenza.

Questo atteggiamento di Chisini non era episodico, ma aveva le sue radici - per cosi' dire- nel profondo della sua formazione scientifica. Atteggiamento che si potrebbe descrivere dicendo che la fantasia creatrice era in ogni istante ed iin ogni passaggio logico assistita da uno spirito critico che nulla lasciava di oscuro, che non permetteva la esistenza di angolini poco illuminati o non completamente rischiarati.

Io credo i poter dire che da questo atteggiamento, che gli era congenale e che egli sviluppo' in contatto con un maestro ineguagliabile quale era F. Enriques, vengono i caratteri distintivi dell'opera di Chisini. Caratteri che io vorrei oggi sintetizzare in due aspetti; con l'intesa che cio' che diro' serve soltanto per strumento conoscitivo di una personalita' complessa e per molti versi anche complicata; ma e'destino che , nella conoscenza umana, i concatti debbano essere utilizzati in forza della loro generalita', anche se questa mortifica e spesso addirittura uccide la vitalita' e la originalita' del pensiero e dell'atto esistenziale. E'- per cosi' dire - la condizione umana che ci lega alla trasmissione delle idee mediante parole e quindi alla genericita' di queste . Il che e' soltanto un aspetto della radicale inesprimibilita' del vissuto concreto storico e della impossibilita' della nostra mente a penetrare tutta la ricchezza della realta' che esiste.

I caratteri di cui volevo parlare sono sostanzialmente la creativita' fantastica e la diffidenza di fronte ad ogni sviluppo formale e teorico.

Di quest'ultima, cioe' della diffidenza di fronte ad ogni ragioamento formale e ad ogni acrobazione algoritmica, si potrebbero portare molte testimonianze; le quali tuttavia hanno lo svantaggio di essere di tipo della trasmissione orale della sapienza, perche' sono di tipo negativo; cioe' sono tali da costituire delle regole di comportamento negative, e quindi non possono essere positivamente documentate da opere positivamente scritte o demandate ai posteri.Esse tuttavia costituiscono un prezioso patrimonio di metodologia,anche se il denominarle come tali avrebbe provocato in Chisini una tipica reazione di rifiuto ad ogni sostemazione teorica astratta.

Ricordo , per esempio, la tecnica con cui egli leggeva le opere che doveva per qualche ragione giudicare . Insofferente di ogni indugio ed intollerante della argomentazione formale e verbale egli andava prima e direttamente alle conclusioni (quando esistevano), e poi criticava direttamente queste cercando un controesempio . Cio' faceva anche con i lavori che noi suoi allievi gli portavamo da esaminare , rifiutandosi spesso di seguire le nostre argomentazioni per giudicare direttamente sulla validita' delle conclusioni.

Ripudio della falsa generalita'.

La genealogia dei teoremi.

La teoria peripatetica delle coniche.

La teoria delle funzioni ellittiche e delle funzioni theta, fondata sulle trasformazioni dei gruppi di punti.

Le trecce come visualizzazione dei rapporti topologici . Ma viste come condizioni necessarie e non sufficienti per la esistenza delle funzioni.

Tecnica per leggere sui casi limiti le proprieta' dei casi generali. Qui entra la sua avversione per la falsa generalita'. Degenerazione dell'inviluppo di una curva variabile, quando si spezza in una parte doppia ed in una parte semplice. Problema delle diramazioni negative del doppino. Utilizzazione delle trecce per i problemi della esistenza delle funzioni di due variabili. La intuiziione del teorema di unicita'.

I problemi della esistenza delle curve con date singolarita' e le variazioni infinitesime.

La geometria e' stata considerata , almeno in qualche suo aspetto , "..il primo capitolo della fisica". E forse per i Greci, al primo nascere di questa scienza, la definizione puo' essere considerata piu' aderente al vero di quanto non lo sia per noi. Infatti si potrebbe dire che al suo nascere come scienza razionale, la Geometria ha costituito una sistemazione delle nostre esperienze riguardanti il nostro situarci relativamente agli oggetti che ci circondano, e le nostre manipolazioni ed operazioni su di essi .Ed il concetto di sistemazione razionale implica quella sistemazione classica che noi conosciamo: enunciazione delle proprieta' considerate come "evidenti", e deduzione rigorosa di quelle considerate come piu' riposte, la cui validita' tuttavia era fondata soltanto su quella, ammessa, dei principi enunciati.

Del resto e' facile osservare che , secoli dopo, lo stesso schema mentale e metodologico ,nella ideazione e nella esposizione,viene riprodotto nelle indagini newtoniane dei principi della Meccanica razionale, s pure su un campo molto piu' vasto di quello coltivato dalla Geometria tradizionale.

E' da osservarsi tuttavia che questo atteggiamento intellettuale, tipico della mentalita' dei Greci, non puo' ammettere limiti estrinseci, almeno in linea di principio; pertanto presso i Greci esso ha condotto alla problematica del continuo, di cui i celebri paradossi (di Achille, del moto,ecc.) possono essere considerati dei sintomi. Sintomi che rivelano il conflitto difficile e perennemente rinascente tra l'immaginazione e la necessita' fondata sulla deduzione logica. Problematica che rinascera' nel Secolo XVII, all'epoca della invenzione del calcolo infinitesimale, e che si trascinera' nei secoli successivi, come e' provato per esempio dalle ricerche riguardanti il continuo geometrico che ancora provocano polemiche, alla fine del secolo XIX.

Tutto questo diciamo perche' intendiamo mettere in luce quanta parte sia dovuta alla immaginazione nella ricerca matematica; anche se la Geometria, nella concezione moderna del termine, viene considerata molto lontana dalle sue origini empiriche ; il che ' stato - a nostro parere - provocato dalla evoluzione e dalle conseguenti crisi che questa scienza ha vissuto sopratutto nel secolo scorso. E del resto pensiamo che il nostro parere sia confermato anche da quello di matematici della statura di D.Hilbert, il quale ha dichiarato che ben poco della Matematica del suo tempo sarebbe esistita senza lo stimolo costituito dalla Meccanica, dalla Fisica e dalla Geometria.

Queste considerazioni potrebbero essere stimate lontane dal tema che vogliamo qui svolgere; ma a noi sembrano pertinenti, perche' pensiamo che Oscar Chisini fornisca un esempio abbastanza tipico di quel matematico creativo, il tipo di "Geometra" di cui H.Poincare' ha parlato nella sua celebre conferenza la Congresso mondiale dei matematici del 1900. Un"tipo" di fisionomia intellettuale che non viene tanto caratterizzato da campo della Matematica che il soggetto coltiva, ma anzitutto e sopratutto dal suo modo di procedere nella ricerca e nella invenzione; per cui - aggiunge Poincare' - si puo' benissimo fare dell'Analisi con mentalita' del geometra, e fare della Geometria con mentalita' da analista.

Nel caso di Chisini l'atteggiamento e la mentalita' sono rivelati da tutta una serie di indizi e di manifestazioni ; e chi ha avuto la fortuna di stargli accanto nei momenti della invenzione e del lavoro di ricerca puo' profittare di questo favore della Provvidenza per cercare di conoscere piu' davvicino il mistero della mente umana e del suo modo di lavorare.

Tra i tanti sintomi della costituzione mentale di Chisini, e manifestazioni della sua caratteristica fisionomia intellettuale vorrei ricordare qui la sua predilezione ed il suo entusiasmo per quelle che egli chiamava le "teorie peripatetiche". Questa sua predilezione aveva radici lontane nel tempo ed era stata favorita dalla frequentazione del suo maestro Federigo Enriques. Ricordo che egli mi raccontο' diverse volte il metodo con il quale vennero scritti i primi volumi di quell'opera monumentale che egli chiamava confidenzialmente " Il librone". I primi due volumi di quest'opera vennero scritti quando i due Autori vivevano entrambi a Bologna; e raccontava Chisini che i vari paragrafi venivano progettati appunto in forma peripatetica, passeggiando sotto i portici di Bologna ; una Bologna del tutto diversa da quella di oggi, ed il cui aspetto noi possiamo soltanto immaginare, leggendo le cronache ed i romanzi che la descrivono. Orbene diceva appunto Chisini che in questo modo vennero concepiti anche i paragrafi che contengono dei calcoli di complicazione non indifferente, come quelli del secondo volume che riguardano l'analisi delle singolarita' delle curve algebriche piane. Al massino - raccontava Chisini - Enriques si arrestava per scrivere per terra con la punta dell'ombrello qualche formula assolutamente indispensabile.

I risultati di queste discussioni e di queste invenzioni venivano in seguito messi sulla carta dal giovane allievo, che tuttavia aveva cosi' modo di imparare uno stile di ricerca che gli era del resto particolarmente congeniale. Il Chisini, divenuto a sua volta professore e maestro, porto' quindi sempre nel seguito della sua vita questa predilezione per il pensare camminando e per la costruzione teorica che , nel suo momento creativo, si nutre prevalentemente dalla immaginazione. Ma l'aspetto piu' interessante di questa rivisitazione di una frequentazione costante e' costituito dal fatto che la immaginazione era costantemente controllata da una critica ferrea, che nulla concedeva alla approssimazione ed alle idee sfumate.

Vorrei osservare che questo lavoro con la immaginazione e il successivo controllo della critica si presentano presso Chisini con aspetti diversi, e in varie occasioni; analizzandole potremo renderci conto del fatto che, da caso a caso, l'intervento della immaginazione ,della fantasia creatrice e della critica hanno dei pesi diversi; ma in ogni caso i giunge a risultati di grande eleganza e di estrema originalita'.

Un primo esempio puo' essere dato da quella "Teoria peripatetica delle coniche " che egli scrisse per il Periodico di Matematiche. In questo caso s i potrebbe dire che l'intervento della immaginazione permette a Chisini di rendere particolarmente evidenti le proposizioni ed il suo temperamento critico gli fa scegliere la strada che tocca le proposizioni veramente importanti, e fondamentali per il possesso della intera teoria; di questa dunque viene presentato lo scheletro portante, quello che innerva e sostiene tutta la massa di proposizioni che costituiscono la teoria completa.

Un secondo esempio potrebbe essere dato dalla dimostrazione , pure "peripatetica" del teorema fondamentale dell'Algebra. In questo caso la procedura seguita rivela , oltre alla vivezza della immaginazione ed alla originalita' della invenzione, un'altra caratteristica della fisionomia intellettuale di Chisini, caratteristica sulla quale dovremo soffermarci anche nel seguito: la sua predilezione per la tecnica che consiste nel considerare un caso particolare, spesso addirittura - come vedremo - un caso limite, ed a giungere alla dimostrazione generale con un opportuno procedimento di generalizzazione.

Nei due casi considerati la immaginazione ha una parte molto importante, ma, per cosi' dire , ha come oggetto sempre deigli enti esistenti , almeno di quella esistenza di cui godono gli enti della Matematica. Ancora piu' interessanti sono i casi in cui i risultati vengono divinati partendo da immagini per cosi' dire convenzionali, dalle quali tuttavia Chisini sapeva trarre partito per giungere alla scoperta di nuove relazioni e di nuove verita'. Per chiarire il mio pensiero vorrei ricordare cio' che egli diceva a proposito della utilizzazione delle figure per rappresentare le curve algebriche. Come e' noto, l'ente "curva algebrica" , almeno nella concezione classica , non puo' essere descritto completamente con un disegno, che rappresenti un esemplare di "curva " nel senso elementare del termine; una rappresentazione molto piu' fedele si potrebbe ottenere per esempio con una superficie , la classica "riemanniana". Tuttavia mi e' capitato di ascoltare talvolta un tentativo di giustificazione dell'impiego delle figure tradizionali, giustificazione che ripoduceva il risultato di analisi e discussioni che erano avvenute tra Chisini ed Enriques, i quali si erano evidentemente posti il problema del significato della rappresentazione e della sua legittimita'; ovviamente in relazione alla legittimita' delle eventuali conseguenze che qualcuno fosse tentato di trarre partendo da queste rappresentazioni. La conclusione a cui erano giunti, riconoscendo la ovvia limitatezza della rappresentazione, era che la inaspettata efficacia in alcuni casi delle convenzioni che si adottano in questo caso e' dovuta al fatto che le funzioni algebriche, dui cui tratta la Geometria algebrica, sono funzioni monogene secondo Cauchy; in altre parole cioe' sono bensi' funzioni complesse , ma hanno una unica derivata; cosi' come la "curva", nel senso tradizionale ed elementare del termine, ha una unica tangente, almeno nei suoi punti regolari.

Questa preoccupazione critica ricorda quella frase di D.Hilbert il quale affermava che " le figure sono delle formule disegnate", quasi per riaffermare la legittimita' delle deduzioni che partono dalla intuizione spaziale , di fronte alla teoria che vorrebbe assegnare il carattere di rigore alle sole deduzioni seguite in base a formule. Teoria la quale mi fa talvolta pensare che alcuni di questi metodologi e critici boccerebbero anche Euclide,Apollonio ed Archimede,se avessero occasione di giudicarli con il loro metro.

Un esempio abbastanza interessante di questa intuizione, che parte da rappresentazioni in parte convenzionali per giungere a risultati validi e' costituito - a mio parere - dalla dimostrazione che Chisini dava del classico teorema di Mehmke-Segre sulla invarianza proiettiva del rapporto dei raggi di curvatura di due curva tangenti fra loro in un punto. Egli basava infatti la sua dimostrazione , sempre "peripatetica",su considerazioni di questo tipo: considerando, nel punto in oggetto, insieme con le due curve date, anche una curva cuspidata ed una curva con flesso, le trasformazioni proiettive mutano in se' queste due ultime curve ; pertanto, considerando le curvature locali come delle coordinate proiettive, le trasformazioni lineari mutano in se' l'elemento zero e l'elemento infinito di queuste coordinate ; quindi devono lasciare immutato il rapporto tra due curvature generiche, come afferma appunto il teorema di Mehmke.

In questo caso io penso che l'attribuire la curvatura infinita alla curva dotata di cuspide nel punto possa derivare dalla analisi delle singolarita' delle curve algebriche piane, analisi che aveva condotto Enriques e Chisini a rappresentare convenzionalmente la struttura delle singolarita' con ramilineari e con "punti satelliti", che sono anche stati rappresentati con diagrammi convenzionali. M da questa rappresentazione convenzionale la immaginazione e la creativita' di Chisini partivano per intuire nuovi rapporti concettuali ; i quali tuttavia non venivano accettati in base alle figure o alle rappresentazioni, ma venivano poi accertati rigorosamente in base ai calcoli ed alle deduzioni ineccepibili.

Il ruolo della verifica nel caso particolare. Il metodo di Poncelet. L'attenzione concentrata soltanto sulle proprieta' che contano e che sono invarianti. La falsa generalita' e gli spazi ad n dimensioni. La intuizione della fondamentale diversita' del problema di esistenza delle funzioni algebriche di piu' variabili e il progresso rispetto ai teoremi di esistenza di Riemann. Le trecce come strumento per l'analisi topologica e lo sforzo di dimostrare la loro rappresentativita' sostanziale.

Abbiamo toccato poco fa uno degli aspetti della mentalita' di ricerca di Chisini, e cioe' la capacita' di generalizzare, di "leggere" (per cosi' dire) il generale nel particolare, cogliendo in questo il germe e la radice per la validita' generale delle proposizioni e trascurando invece cio' che e' contingente e specifico del particolare. Io penso che sia stata questa sua mentalita' ad ispirare il suo atteggiamento anche nella didattica. Per esempio mi sono spesso domandato perche' egli presentase la Goemetria proiettiva non nelle linee della grande sintesi di K.K.von Staudt o anche in quelle del suo maestro F.Enriques, che aveva colmato le lacune logiche e concellato i nei della trattazione del grande geometra tedesco; ma presentasse invece la materia secondo la visione dettata dal metodo di Poncelet, visione che mi pareva allora sprovvista di quella coerenza ede eleganza che invece si possono attribuire alle altre citate. Forse la spiegazione risiede proprio in questa mentalita' di Chisini che lo portava all'essenziale, a cogliere le radici e - per cosi' dire - i germi delle cose, ed i momenti che fanno scattare la intuizione generalizzatrice. Ho capito soltanto in seguuito quella specie di affinita' interiore che gli faceva preferire il cammino del geometra francese; infatti, a detta degli storici, Poncelet possedeva in massimo grado quelle facolta' di intuizione e di creativita' che Chisini esercitava quotidianamente. Non e' un caso infatti che la Geometria proiettiva sia stata creata , per cosi' dire , dal nulla, quando il Poncelet era prigioniero in Russia e nella impossibilita' di accedere alle fonti della cultura matematica del suo tempo. Ma anche Chisini creava abitualmente senza consultare il pensiero degli altri, per una sorta di moto spontaneo che scaturiva dall'interno della sua mente, senza che fosse necessario lo stimolo fornito dall'ascolto degli altri.

Questo suo atteggiamento creativo lo portava anche a diffidare della generalita' che egli giudicava come falsa ed inutile; quella generalita' - per intenderci - che conduce molto spesso certi Autori ad enunciare certi risultati negli spazi proiettivi ad n dimensioni (con n qualunque) , con una magniloquenza che talvolta nasconde forse lo scarso interesse dei risultati, quando non maschera addirittura la loro inesistenza. Ricordo per esempio il suo giudizio poco benevolo su questo atteggiamento, espresso in occasione della lettura di un lavoro di questo tipo. Chisini, secondo la sua abitudine, voleva "vedere" il significato dei teoremi; pertanto aveva "tradotto" il teorema, enunciato per n qualunque, cercando una immagine per n=2, cioe' nel piano, ed aveva immediatamente verificato che l'enunciato non era valido in quel caso. Dal che traeva naturalmente conferma alla sua diffidenza per la magniloquenza delle presentazioni che maschera la poverta' dei risultati.

Cio' era del resto coerente con il suo atteggiamento nei riguardi del pensiero degli altri: infatti egli era impaziente delle lunghe argomentazioni, perche' temeva che nella catena dei teoremi e delle deduzioni si nascondesse qualche crepa, e sapeva bene che questa, anche pissola, avrebbe potuto inficiare la stabilita' di una costruzione, anche monumentale. Egli soleva dire infatti che con tanti ragionamentni "quasi giusti" si dimostra qualunque cosa: di conseguenza egli voleva dei ragionamenti " peripatetici", cioe' di quelli che si possono controllare e soppesare anche passeggiando , e che non richiedono grandi apparati di calcolo. Ricordo ancora cio' che avvenne quando dovette giudicare un lavoro di un concorrente ad un concorso. Lo stesso lavoro era stato ovviamente letto e giudicato anche dagli altri commissari; ma Chisini era particolarmente contento della propria tecnica di giudizio. Egli mi diceva infatti che gli altri avevano letto tutto il lavoro del concorrente; il lavoro non era lungo, ma, per la mentalita' di Chisini, la sua lettura era giudicata particolarmente "noiosa". Gli altri commissari avevano, presto o tardi, trovato il punto in cui il ragionamento del concorrente non si reggeva; Chisini diceva di essere andato direttamente all'ultima pagina, di aver letto il teorema conclusivo, e di aver costruito un controesempio; il che gli bastava per un giudizio negativo, senza essere costretto a seguire passo passo le argomentazioni altrui.

Occorre aggiungere che la costruzione del controesempio era facile soltanto per una persona come lui, cioe' ad una mente e ad una fantasia particolarmente creative. Per gli altri invece risultava molto piu' facile seguire pazientemente le argomentazioni; ma egli non si rendeva conto del fatto che la sua mente poteva arrivare con un salto alle conclusioni, che invece per molti altri dovevano essere conseguite con un lungo e penoso cammino.

Siamo giunti a presentare quella parte del lavoro creativo di Chisni che a me sembra piu' caratteristica, se non la piu' importante, delle sua ricerche. Precisamente le ricerche riguardanti i teoremi di esistenza delle funzioni algebriche di piu' variabili. La sua intuizione, confortata dalla ferrea critica, gli aveva mostrato che il punto fondamentale del problema e' costituito dal passaggio dalla dimensione 1 alla dimesione 2. Infatti nel caso delle funzioni algebriche di una sola variabile esistono delle argomentazioni classiche sulla esistenza di certe funzioni algebriche, sotto la condizione che siano assegnati i loro punti di diramazione; pertanto il teorema di esistenza di quelle che venivano abitualmente chiamate le "rette multiple" sono noti , e sopratutto garantiscono la esistenza - in generale -di diverse funzioni algebriche, quando sia assegnato il gruppo dei punti di diramazione. E' noto che questo risultato si ricollega strettamente alla struttura topologica della sfera di Neumann, privata di un certo numero di punti. Al di la' del caso banale della funzione algebrica a due valori, si dimostra che , purche' i punti del gruppo suddetto siano in numero pari, esistono in generale varie rette multiple birazionalmente diverse tra loro, le quali corrispondono a veria superfici di Riemann di genere diverso .

La funzione algebrica di piu' variabili , di fronte a questo problema di esistenza, presenta delle difficolta' del tutto nuove, gia' nel caso in cui le variabili indipendenti sia due, cioe' nel caso in si abbia a che fare con quello che viene indicato come "piano multiplo". In questo caso esiste un luogo algebrico, che e' la "curva di diramazione" del piano multiplo. Salvo il caso del tutto elemetare della funzione algebrica a due valori, cioe' del piano doppio, la curva di diramazione deve soddisfare a certe condizioni necessarie che riguardano i suoi caratteri pluckeriani e ad altre condizioni che sostanzialmente determinano il gruppo di Poincare' del piano proiettivo complesso dal quale sono stati tolti i punti della curva di diramazione.

Gia' F. Enriques aveva espresso certe condizioni necessarie perche' una data curva algebrica piana fosse curva di diramazione per un piano multiplo. E Chisini prosegui' le ricerche del maestro nella direzione che lo conduceva a ricercare le condizioni sufficienti, cioe' i teoremi di esistenza veri e propri.

Chisini intui' anzitutto che la problematica relativa alla dimostrazione dei teoremi di esisteza in questo caso doveva essere molto complessa e difficile; ricordo che ad una mia domanda , abbastanza ingenua, sulle cause di queste difficolta' egli rispose dicendo che "ci sono troppi legami", forse facendo riferimento alle condizioni precisate da Enriques. Ma Chisini intui' inoltre che le vere difficolta' si incontrano nel passaggio da una a due dimensioni, e che pertanto il problema veramente difficile e duro era quello di garantire la esistenza dei piani multipli, fondandosi sui caratteri della curva di diramazione.

Mi diceva che era giunto allo studio di queste questioni studiando la degenerazione dell'inviluppo di piani di una superficie che , variando con continuita' nel campo complesso, viene ad acquistare una curva doppia; il problema analogo si pone nel piano quando una curva, variando in un sistema la cui curva generica e' irriducibile, viene a spezzarsi, acquistando una parte doppia . In questo caso l'inviluppo aderente degenera in un modo che attiro' la curiosita' di Chisini (come egli mi diceva) ed avvio' la sua attenzione allo studio delle degenerazioni del contorno apparente di una superficie e quindi, per contiguita' quasi naturale, allo studio delle condizioni di esistenza delle funzioni algebriche di due variabili.

Penso che cosi' sia incominciato l'insieme di lavori e di attivita' di ricerca e di creazione della sua maturita', attivita' in cui egli amifesto' in pieno le qualita' della sua intelligenza.

Ho gia' parlato della sua predilezione per la generalizzazione, per il metodo di Poncelet , e per le procedure che gli permettessero di "leggere " le proprieta' generali nei casi particolari, o nei casi limite, permettendogli cosi' la massima economia di pensiero e consentendogli quelle verifiche immediate che erano richieste dal suo spirito critico e che sono difficili o complicate, e quindi poco "visibili" ,nei casi generali e negli enunciati generici.

Pertanto noi incontriamo in questi lavori il frequente uso dei casi limite, delle curve degeneri, magari in parti multiple. In queste procedure, che cosituiscono spesso delle vere e proprie acrobazione intellettuali, si manifestava in pieno il suo istinto critico. Parlo di istinto perche' e' chiaro che con procedimenti di questo tipo l'errore e' a portata di mano e costituisce un pericolo costante e presente ad ogni istante. Ma egli mi parlava spesso di quello che B. Pascal chiamava " esprit de finesse", contrapponendolo allo "esprit de geometrie". Ed effettivamente egli dimostrava di possedere in sommo grado questo "esprit de finesse" che gli permetteva di vedere le cose, come per un intuito profondo e quasi incosciente , indipendentemente dal ragionamento rigoroso e pedantesco.

Si tratta di una "presa" sulla realta' delle cose e sulla loro verita' che e' consentita forse soltanto a pochi eletti , e che li porta a "vedere" le cose , a giungere alla conclusione con un salto, molto prima che arrivi il gregge delle persone comuni, che non possono volare ,ma che debbono invece limitarsi a camminare e ad arrampicarsi, spesso penosamente.

In questo ambito credo che siano nate tutte quelle ricerche che portarono Chisini alla costruzione delle "trecce" che portano il suo nome. Egli invento' questa rappresentazione , presentandola anzitutto come una convenzione per rendere visibili le sole circostanze importanti ed interessanti ai fini della determinazione del gruppo di Poincare' del piano proiettivo complesso di cui si diceva . Egli si preoccupo' in seguito di far vedere che questa rappresentazione non e' del tutto arbitraria e convenzionale, ma che puo' si puo' considerare ottenuta proiettando, nello spazio tridimensionale, certe sottovarieta' opportunamente scelte della superficie di Riemann. Ed in questa clausola, che ricoreda la scelta opportuna degli enti dia rendere "visibili" sta tutta la genialita' di Chisini, che aveva scelto quasi per istinto le sole cose che importasse conoscere, ovviamente ai fini delle sue ricerche.

Ho detto che egli dedico' a queste ricerche gli anni della sua maturita' . Vorrei aggiungere che in queste ricerche egli manifesto' in modo particolare i caratteri fondamentali della sua intelligenza, e precisamente la creativita' e lo spirito critico. Infatti la invenzione delle "trecce" porta la sigla della sua creativita'; ma questa era continuamente tenuta a freno dal suo spirito critico, che lo conduceva ad ostinarsi nella costruzione di modelli materiali, di non accontentarsi dei disegni e delle formule ; chi l'ha incontrato in quegli anni ricorda che una delle frasi piu' frequentemente ripetute era "..non mi fido". E questa diffidenza lo portava a voler costruire modelli tangibili e materiali, sui quali poter verificare la validita' delle sue invenzioni.

Lezione di umilta' e di acutezza critica.
L'aggeggio per disegnare le curve; la intuizione del rapporto tra la curva e quella che si ottiene trascinando un "monopattino" ad essa collegato. Il "pantografo" costruito con un pezzo di elastico.

L'evoluzione del rapporto tra i due autori del "Librone" si puo' rilevare nella differenza del carattere tra i diversi volumi, col passare del tempo: solenni ed altisonanti i primi, con frequentissimi richiami storici e con affermazioni di principio del tutto generali ; piu' concreti e diretti gli ultimi due, con soluzioni dirette ed originali di problemi esistenti sulla ribalta nell'epoca. Si consideri per esempio la trattazione del " General principio topologico di corrispondenza" che si trova nel III volume e che e' dovuta a Chisini . Ivi si trova quella concretezza che e' tipica dell'uomo, quella ricerca della "visibilita'" che fu uno dei motivi fondamentali, ma anche forse uno dei suoi limiti nella ricerca. Sappiamo infatti che i risultati conseguiti da Chisini sono stati generalizzati ed enunciati in maniera formalmente ineccepibile per casi motlo piu' generali di quelli da lui considerati. Ma rimane la validita' del metodo critico , che non accetta la generalizzazione "selvaggia" e per cio' stesso priva di senso di chi crede di aver conquistato grandi spazi alla scienza per il solo fatto di aver guardato fuori della finestra della sua camera.

Siamo giunti alla conclusione della nostra sommaria analisi . E per cio' stesso ricadiamo nell'interrogativo che abbiamo considerato all'inizio di questa nostra conversazione : che cosa e' la Geometria.
A questo proposito ricordo la prefazione di un trattato di un altro maestro che ebbi la fortuna immeritata di incontrare : Bruno Finzi . All'inizio del suo trattato di Meccanica Razionale Finzi scrive che nei tempi andati si solve iniziare un trattato della sua scienza dicendo che " ...la Meccanica razionale e' ..." e qui una serie di proposizioni che non erano false , prese in se', ma che la critica odierna non accetta piu' nella loro totalita'.

Aggiungeva Finzi: diciamo al lettore di questo libro : cio' che ivi e' contenuto e' Meccanica razionale, ma esistono altri argomenti, che sono afferenti alla stessa branca della Matematica,e che non sono contenuti in questo trattato .

Forse qualche cosa di analogo si puo' dire a proposito della Geometria : dopo aver lungamente parlato devo confessare che non sono in grado di dare una definizione soddisfacente di questa branca della Matematica : non so che cosa sia la Gaometria , ma forse so riconosere i cultori di questa scienza che sono stati veramente grandi . E' sempre amaro dover confessare che si e' pasati vicino ad una grande personalita' senza trarre da questa frequentazione tutto il bene e tutto il profitto che si sarebbe dovuto trarre

Ma speriamo che l'affetto vero e sincero e l'ammirazione ,e la meditazione della loro personalita' possano servire a chi vuole raccoglierne l'eredita' spirituale e proseguire il cammino (spesso lungo e faticoso) che essi hanno tracciato

In altra occasione, parlando del Maestro, ho accennato alla insegna che e' scritta sulla tomba dei Chisini, nel cimitero del loro paese d'origine. Tale insegna recita :

"... palmas in manibus eorum"

Quando ho parlato non sapevo , o non ricordavo, che e' questa una frase della Bibbia, e precisamente del libro dell'Apocalisse (VII,9), laddove il Profeta descrive la sua visione degli eletti . E veramente Oscar Chisini fu uno tra questi , quando si abbia riguardo alle doti intellettuali e morali. Il resto, cioe' il giudizio definitivo e complessivo e' un mistero racchiuso nella Sapienza divina, che fa sorgere questi uomini nel corso della storia umana forse perche' noi possiamo avere un'idea dellaIntelligenza suprema, che trascende ogni nostra immaginazione ed ogni nostro pensiero.

Ho gia' avuto occasione di parlare e di scrivere di Lui, della Sua figura di uomo e di scienziato; altri ha scritto, con maggiore competenza ed autorita' di me, sulla importanza delle sue ricerche. Non voglio ripetere ora quanto e' gia stato detto, oppure cedere alla tentazione della aneddottica spicciola, che avrebbe forse significato per coloro che l'hanno conosciuto direttamente nei suoi momenti migliori. Vorrei invece profittare della singolare fortuna che ho avuto , non per mio merito, di essergli spesso accanto nei momenti creativi per meditare sul significato della scienza che egli ha coltivato. Penso infatti che il vedere, anche in modo esteriore e sommario, come crea la mente di un matematico creativo possa servire per capire un po' meglio che cosa sia la nostra scienza.

L'analisi della psicologia dei matematici non e' cosa nuova . Vorrei ricordare a questo proposito l'opera di Hadamard (egli stesso matematico di rilievo) e la celebre conferenza tenuta da Henri Poi0ncare' al Congresso di matematici di Parigi, nel 1900.

In questa conferenza Poincare' disse, tra l'altro:

"E' impossibile studiare le opere dei grandi matematici (e del resto anche quelle dei piccoli), senza notare due tendenze opposte, o piuttosto due spiriti del tutto diversi. Gli uni sono preoccupati della logica; a leggeere i loro lavori si direbbe che hanno camminato soltanto passo passo, con il metodo i un Vauban, che spinge i suoi trinceramenti contro una piazzaforte senza lasciare nulla al caso; gli altri si lasciano guidare dalla intuizione, e fanno delle conquiste raide ed improvvise , ma talvolta precarie, come dei cavalleggeri d'avanguardia. Non e' la materia trattata che impone l'uno o l'altro metodo. Anche se i primi vengono chiamati spesso analisti e gli altri vengono chiamati geometri, cio' non impedisce che i primi restino analisti anche quando fanno dell'analisi matematica pura. E'la natura stessa della loro intelligenza che li rende logici oppure intuitivi, e non si possono spogliare della loro natura quando studiano un argomento nuovo."

E poco sotto lo stesso Poincare' aggiungeva:

"Poncelet era uno degli spiriti piu' intuitivi di questo secolo (il XIX) . Lo era con passione, quasi con ostentazione".

In altra occasione ed in altra sede, ho citato queste parole di Poincare' a proposito della intelligenza e dell'opera di Federigo Enriques; ed ho scritto che lo stesso Enriques mi appariva come il rappresentante tipico di questa configurazione mentale. A proposito di Oscar Chisini vorrei aggiungere qualche cosa in piu';infatti mi pare di poter dire che Egli dimostrava quella capacita' di creazione e di intuizione che Poincare' assimilava alle imprese di conquista dei cavalleggeri, ma possedeva anche una profonda capacita' di critica - come vedremo - che gli evitava i pericoli di quelle che lo stesso Poincare' indicava come "conquiste precarie".